

Fractionary. Un beau matériel. Comment l'utiliser ?

Son objectif central est de construire les concepts de la fraction nombre (pour les passionnés il existe une différence entre fraction nombre et fraction opérateur : la fraction opérateur ($\frac{1}{3}$ de quelque chose) se présente comme suit : $\frac{1}{3}$ de 12 pommes par exemple au contraire de la fraction nombre qui est seulement $\frac{1}{3}$ tout seul, dans l'absolu).

L'expérience Fractionary démontre que de la fraction nombre, on passe aisément à la fraction opérateur.

L'inverse n'est pas vrai. De la fraction opérateur, on ne passe pas aisément à la fraction nombre. Ce fait est expliqué plus loin.

Acquérir une conviction et ne pas oser la dire n'est pas servir l'Ecole. Je le dis donc : " Tant que nos autorités ne se pencheront pas sur cette méthode pour la vivre dans les classes, nos programmes scolaires continueront de nous envoyer dans le mur ! "

Il faut aller au fond des concepts dans un seul matériel. Mais très complet. (Celui-ci ou un autre si vous trouvez mieux.) Un matériel - et surtout une méthode - qui permettent de tout relier à une seule unité constante en même temps que nous plongeons de plus en plus profond dans les sens cachés de ses fractions et de leurs relations.

La difficulté en fractions réside peu dans les changements d'unités, mais beaucoup dans la complexité de concepts successifs en croissance au sein d'une seule grandeur. Ce sont les voyages en profondeur au centre d'une structure qui provoque les déclics. Venez observer combien alors les élèves transfèrent rapidement vers les autres unités. C'est en observant et en analysant les réactions des enfants, le pourquoi de leurs difficultés ou de leurs soudains progrès, en observant s'ils ont ou non du plaisir et en voulant trouver mieux, en cherchant le jeu efficace pour le développement détecté utile, en inventant d'autres jeux lorsque le développement détecté utile est long à mettre en place, en acceptant les critiques et les idées des collègues que la méthode se développe par la pratique depuis dix ans.

1) 1er stade : la spatialisation :

Structurer spatialement l'utilisation des 8 différents blocs géométriques.

Apprendre par corps avant d'apprendre par tête.

Tâter, toucher et prendre les empreintes des 8 formes et leurs dimensions.

Toucher et manipuler tellement que même les yeux fermés, l'apprenant sent que le

triangle rectangle va trois fois dans le trapèze rectangle.

L'apprenant ne connaît pas le nom "triangle rectangle" ? Ni les autres noms ??

Pas grave. **Son corps, lui, sait déjà le distinguer du trapèze et du triangle obtusangle et du....**

Son corps peut même lui indiquer que celui-là est plus petit et qu'il en faut deux ou trois ou plus pour couvrir cet autre.

Lorsque ses yeux le trompent, il trouve les réponses avec ses doigts ou il retient certaines combinaisons par les mouvements qu'il a maintes fois répétés.

Les parties de son corps stockent les informations à plusieurs endroits : ce sont **les mémoires tactiles, visuelles et kinesthésiques** (les mouvements et l'usage du schéma corporel). Mises en réseau par ses activités, les informations stockées dans ses différentes mémoires vont se transformer en images mentales de plus en plus complètes et complexes. Ces représentations mentales qui contiennent des informations kinesthésiques, visuelles, verbales et tactiles, il va les comparer, les combiner, les structurer chaque fois qu'il imagine une construction ou qu'il résout un défi logico-spatial.

Ses connaissances des grandeurs, des quantités, des rapports, des formes et des contenus fractionnaires augmentent, se stabilisent et s'organisent en même temps qu'augmentent ses compétences corporelles à reproduire, créer, imaginer et complexifier l'organisation spatiale des huit figures géométriques gigognes.

Lorsqu'il entendra le nom des blocs en fractions, pour la première fois, son corps dira : Ah oui, je connais déjà ces choses-là !

S'il a suffisamment manipulé, cherché avec son corps et réfléchi à partir de ses représentations mentales, lorsqu'il abordera l'expression des concepts

mathématiques, **son corps et ses représentations mentales lui fourniront des explications** et le guideront dans sa recherche de sens.

Il faut donc beaucoup jouer avec ces blocs difficiles.

Deux modes exploratoires peuvent se côtoyer : des activités libres et des activités dirigées.

Les activités libres sont celles que les enfants désirent au début : ils ont envie de toucher et de créer. Laissons-les agir. Ils vont découvrir avec enthousiasme et répéter des gestes, développer leurs compétences sans se lasser car ils poursuivent leurs propres objectifs.

Les enfants complexifient d'eux-mêmes leurs activités libres, mais parfois aussi stagnent.

Vient alors le temps des activités dirigées (qui vont côtoyer les activités libres).

Les fiches de défis logico-spatiaux, les jeux et les exercices développés par l'observation des besoins sur plusieurs années sont là pour stimuler les avancées. Certains jeux permettent de faire réfléchir sans même y penser.

Des étapes sont franchies :

- 1^{ère} étape : mémoriser des longueurs, des angles, des mouvements de rotation, de retournement (image en miroir : "Fais la crêpe") et associer 8 couleurs nommées avec 8 figures géométriques (pas ou peu nommées mais reconnues corporellement) : rouge = 1 forme (losange), vert = 1 autre forme (trapèze), jaune = ...

- 2^{ème} étape : 28 rapports de grandeur : **rouge** ➤ **vert**, **rouge** ◀ **bleu foncé**, etc. ...

2) 2ème stade : Nommer-Associer-Sérier "

.Nommer les blocs en fractions.

.Associer chaque dénominateur avec sa figure géométrique personnelle et unique.

.Sérier solidairement les figures géométriques et leurs dénominateurs.

Fractionary est le seul matériel qui installe 7 images géométriquement très différentes pour 7 dénominateurs.

Sept dénominateurs seront ainsi clairement identifiés et personnalisés.

Donc plus de confusion possible avec les autres et ...leur grandeur !

La sériation devient évidente ! ... Quoique ! Beaucoup de jeux et d'exercices devront se répéter pour atteindre les stades de verbalisation et de transfert.

Si quand je lis $1/2$ et $1/12$, je vois instantanément dans ma tête le grand trapèze $1/2$ et le petit triangle $1/12$, je suis immédiatement certain que le plus grand nombre (12) n'est pas la plus grande fraction, mais est la plus petite fraction.

Je vois instantanément le grand $1/2$ et le petit $1/12$ parce que l'un est un trapèze et l'autre un triangle. Un jeu comme "Déraptor" ajoute des attaches affectives à ces distinctions géométriques.

Si les 2 blocs avaient la même image géométrique (tous les deux des trapèzes par exemple), des élèves confondraient parfois l'un avec l'autre, car beaucoup n'ont pas la conservation des grandeurs, d'où l'utilité des formes différentes.

Pour installer une sériation stable et exemplaire, des **figures géométriques différentes** sont indispensables. Et à chacune **sa couleur unique**.

Lorsque l'élève sait **concrètement et immédiatement** que $1/12$ est plus petit que $1/3$ ou $1/9$ ou $1/2$ ou $1/6$ ou $1/4$..., que $1/18$ est plus petit que $1/2$ ou $1/3$ ou ... (**28 exemples** avec Fractionary), il devient **capable de transformer** ses 28 certitudes en une **loi générale** (Puisque l'unité ne diminue pas et ne grandit pas, au plus le dénominateur est un grand nombre, au plus les morceaux sont nombreux et donc petits pour couvrir l'unité.) et **d'utiliser** cette loi **murie longuement et concrètement** pour **admettre et imaginer** que n'importe quelle fraction est plus petite qu'une autre si le nombre de son dénominateur est plus grand. Et de compléter cette loi en y intégrant le nombre du numérateur ($1/6$ est plus grand que $1/18$, mais plus petit que $4/18$).

La première étape de structuration spatiale (point **1) spatialisation** ci-dessus) étant maîtrisée, l'apprenant a déjà une bonne connaissance des formes et des manières possibles de les agencer pour construire d'autres formes plus complexes. Autrement dit il sait faire des additions de fractions ou trouver des fractions équivalentes. Mais seulement en associant des blocs géométriques. Sans parler de fractions.

Ce savoir faire conditionne la suite. L'élève a déjà du sens qu'il peut transférer vers le savoir dire, le savoir lire et le savoir écrire en fractions. Ses connaissances concrètes

vont être transférées vers une étendue mathématique beaucoup plus vaste qui se dit, se lit, se calcule et s'écrit.

Pour se former, l'esprit devra aller au-delà des doigts.

Mais chaque nouvelle étape est une nouvelle naissance. Un nouveau passage qui voit l'apparition de nouvelles erreurs et de nouvelles difficultés.

Il faut y consacrer le temps nécessaire pour qu'apparaissent des réponses toujours exactes et rapides, donc solides pour y jucher la connaissance suivante.

Au fil des années, j'ai pris conscience de l'existence de nombreuses étapes.

J'invente de nouveaux jeux au fur et à mesure que je découvre ces étapes.

Le jeu n'est un gain de temps que si dans le parcours des apprentissages, toutes les étapes nécessaires ont été préalablement identifiées !

Après les découvertes spatiales,

- 2^{ème} étape : 8 nouvelles associations orales : rouge = tiers, vert = quart, ...

Entendre en fraction, agir et verbaliser en couleur : prendre et lever le losange et dire "rouge" lorsqu'on entend "Lève un tiers ! " .

Verbalisation (plus difficile) : prendre et lever le losange et dire "un tiers" lorsqu'on entend "Lève un rouge ! " .

Jeu "Gnap ! " , activités dans le gant de toilette,...

- 3^{ème} étape : nouvelles associations écrites en lecture : découvrir que l'ensemble oral que j'entends et dis comme un tout se dissocie en une image écrite spatiale bizarre où l'écriture ne va plus uniquement de gauche à droite sur une seule ligne, mais aussi de haut en bas sur cette ligne.

Associer "un tiers" à " $\frac{1}{3}$ ", "un quart" à " $\frac{1}{4}$ ", ...

pour savoir lire : $\frac{1}{3}$ se dit "un tiers", ...

erreurs de lecture : pour $\frac{1}{4}$: dire 1 quatorzième (prendre la / pour 1),
pour $\frac{3}{6}$, dire 6 tiers (inverser quantité et nom), ...

Brevets 01, 1, 2. Jeu Déraptor et jeu Banque.

- 4^{ème} étape : Il sait lire, mais au passage à l'écrit des fautes spatiales réapparaissent :

L'enfant écrit un tiers plutôt que un , ou $\frac{1}{3}$ plutôt que $\frac{1}{3}$.
/ (rien) tiers / (rien)

Certains enfants ne transfèrent pas par eux-mêmes leur savoir lire en savoir écrire.

- 5^{ème} étape : Orale.

Exemple : Tiers > quart.

Il sait que rouge = tiers, que vert = quart et que rouge > vert.

Mais chaque enfant ne transfère pas que tiers > quart.

Nous devons l'aider à établir le transfert, d'autant plus longtemps

(!!!) que l'association précédente rouge = tiers et tiers = rouge n'est pas stabilisée et rapide.

Presque 28 nouveaux rapports de grandeur.

A installer dans le langage oral d'abord.

Audition : " 1 tiers ou 1 quart ? Prends (ou dessine) le plus grand."

Verbalisation : " Prends en mains 1 vert et 1 rouge. En fraction nomme le plus grand."

- **6^{ème} étape : Lecture active avec blocs. J'écris au tableau $1/3$ et $1/4$. On se tait. Je ne dis rien et vous non plus. Ni le nom en fraction, ni le nom en couleur. Je vais compter jusque trois et à trois, vous prendrez le plus grand. Des élèves se trompent et lèvent $1/4$ parce qu'ils lisent dans leur tête 3 et 4 à la place de tiers et quart. Il faut les aider à transférer dans la lecture les connaissances orales et matérielles des blocs.**

Transfert assez rapide si les étapes précédentes sont bien en place et si l'enfant a de bonnes images mentales.

- **7^{ème} étape : Recopie la fraction la plus grande : $1/3$ ou $1/4$. On ne dit rien !**

Transfert assez rapide si les étapes précédentes sont bien en place et si l'enfant a de bonnes images mentales car les blocs ne sont plus mis à sa disposition.

Pour qu'il puisse communiquer en mathématique, il doit donc en maîtriser parfaitement le vocabulaire oral et les codes écrits.

Pour qu'il puisse réfléchir en mathématique, il doit jongler avec ces codes.

Les termes en fraction et leur place respective doivent devenir aussi clairs que s'ils étaient remplacés par "table, fraise ou voiture".

Pour voir de suite ce dont on parle et donc savoir sans réfléchir que la fraise est plus petite que la chaise, elle-même plus petite que la voiture (sériation de fractions : $1/18 < 1/3 < 1/2$).

Pour savoir sans réfléchir que la fraise peut se poser 32 fois sur la chaise et la chaise entrer 4 fois dans la voiture (contenances et/ou équivalences : $1/18$ va 3 fois sur $1/6$ et $1/6$ va 3 fois sur $1/2$).

Avoir des concepts clairs libère de l'espace dans la mémoire de travail pour réfléchir correctement à des situations plus complexes. Moins une compétence est automatisée et plus elle nécessite d'attention et de place dans notre mémoire de travail. Notre mémoire de travail est limitée. Au plus nous devons être vigilants et consacrer de l'attention à des concepts simples, au moins disponibles sommes-nous pour les concepts difficiles.

Idéalement, une seule solution : les nouveaux concepts restent d'abord limités à des actes concrets et ne sont transformés en lois utilisant les symboles qu'au fur et à mesure de l'automatisation des connaissances préalables et des lois précédentes.

Pour cela, il doit connaître (agir, dire, lire, écrire) les concepts de numérateurs et dénominateurs. Sérier doit devenir facile : sentir que le douzième est plus petit que le demi doit devenir une évidence immédiate (et physique et orale et écrite).

Connaissant corporellement, mais aussi en langages oral et écrit les valeurs comparées de nombreux dénominateurs, il saura placer un quinzième inexistant dans

le matériel et jamais entendu, entre le douzième et le dix-huitième connus.

Sur une base stable et large, il saura réfléchir aux concepts suivants qui intégreront les quatre premiers (spatial, numérateur, dénominateur et sériation). A condition que les nouveaux concepts soient d'abord puisés dans un concret riche de structures mathématiques complexes, au sein d'une même grandeur unité, car il ne faut pas dire "Compare le quart et le tiers d'une même unité". Il faut le faire ! Puis repasser par l'oral et l'écrit. Et aller découvrir et mémoriser ensuite beaucoup d'équivalences dans la structure de cette même unité. Et dire et écrire par cœur ces fractions équivalentes.

L'usage à partir de six ans, de huit dénominateurs, de numérateurs jusque dix-huit et de multiples activités de sériations concrètes, orales et écrites sont des clés permettant de supprimer dès huit ans des erreurs telles que $1/3 + 1/4 = 2/7$.

Il apparaît que ne voir que les demis et quarts (et d'autres occasionnellement) comme on le fait dans les jeunes classes est - pour atteindre les objectifs cités ci-dessus - très insuffisant à double titre :

Premièrement.

Demi et quart (et...), c'est trop facile et trop peu pour s'habituer à :

- évaluer la grandeur d'une fraction, à l'inverse d'un nombre entier,
- utiliser le langage oral et le code écrit,
- utiliser les 2 nombres de la fraction,
- sérier des fractions abstraites sans avoir sérier, beaucoup et longtemps, des fractions concrètes.

Lors des 7 étapes citées plus haut, les erreurs sont nombreuses et récurrentes : se tromper de blocs : prendre des tiers pour des quarts ou inversement, ou des neuvièmes pour des douzièmes, ou ... Or l'association –immédiate et sans effort- du nom avec une représentation correcte est un préalable à la sériation des fractions.

Autre erreur courante : voir l'écrit $3/4$ et dire, prendre ou colorier $4/3$ alors que cette erreur n'apparaissait plus dans l'oral. Les fractions doivent être diverses dès le début de l'écrit. Car l'ordre correct de la lecture et de l'écriture ne se transforme en règle généralisée que s'il s'exerce et se corrige sur des dénominateurs variés et puisant leur valeur dans un matériel concret structuré et unique pour empêcher les confusions.

Pour chacune des 7 étapes, il faut de nombreux exemples et essais concrets pour habituer notre pensée à combiner, sans en oublier un, les 2 nombres de la fraction : le numérateur et le dénominateur et leur rôle respectif.

Pour devenir une loi pensée, c'est un exercice qui doit se répéter, se diversifier et porter sur des fractions plus petites et plus variées que demi et quart.

Pourquoi les fractions sont-elles mal comprises ?

Parce qu'elles sont plus compliquées et que paradoxalement, on y consacre moins de matériel concret, moins de matériel structuré et beaucoup moins de temps.

Seuls les nombres entiers (1, 2, 3, 4, 5, ...) sont utilisés, étudiés et combinés en classe

très tôt : dès 4 ans. Pour les représenter, nous utilisons de multiples supports concrets : marrons, jetons, graines, ... Du matériel structuré : réglettes Cuisenaire, boîtes de cubes, bouliers, balances numériques, ... Nous les étudions jusque 10, puis jusque 20, puis jusque 100, ... Et nous leur consacrons du temps quotidiennement. De plus, contrairement aux fractions, on les utilise dans nos activités quotidiennes courantes : 2 chaussettes, 4 tartines, 4 roues à la voiture, 6 pétales à la fleur, 7 invités pour mon anniversaire, 24 enfants en classe, ...

On les série par des comptages oraux et écrits.

On les compose et les décompose par des présentations en "maison de 8, de 9, de 10...", par des présentations en arbres, des calculs.

Par tous ces avantages, les nombres entiers creusent un canal de pensée unique et dominant qui aspire à lui les fractions. Pour être comprises, les fractions doivent se creuser un autre canal de pensée, comme nous allons le voir.

Les nombres entiers sont simples, non composés, contrairement aux fractions qui sont des nombres doubles composés de 2 nombres : le numérateur et le dénominateur.

Cela engendre cinq complications :

1) Leur grandeur est inversement proportionnelle aux nombres de morceaux :

$12 > 6$, mais $1/12 < 1/6$.

2) Les fractions sont plus compliquées à combiner :

Par exemple : Avec des nombres entiers, $3 + 4 = 7$. Trois est une quantité de 1. Quatre est une quantité de 1. Sept est une quantité de 1. Leur dénominateur commun est 1. Mais en fraction $1/3 + 1/4$ ne donne pas $1/7$. Car leur dénominateur commun n'est pas 1. Leur dénominateur commun est 12.

Autre exemple : $2 + 5 = 7$. Leur dénominateur commun est encore 1.

Mais $1/2 + 1/5$ ne donne pas $1/7$. Car leur dénominateur commun n'est pas 1. Et n'est plus 12. Ici, cela change. Leur dénominateur commun devient 10.

Avec les nombres entiers, le dénominateur est constant, toujours 1.

Avec les fractions, les dénominateurs changent, se cachent, il faut les calculer chaque fois.

3) Avec les nombres entiers, les plus grands nombres contiennent les plus petits.

C'est le contraire avec les fractions : les plus petits nombres au dénominateur contiennent les plus grands.

Par exemple : 4 contient 3. Et 7 contient 4 et 3.

Mais $1/4$ ne contient pas $1/3$. C'est $1/3$ qui contient $1/4$. Et $1/7$ ne contient ni $1/4$, ni $1/3$. C'est $1/3$ et $1/4$ qui peuvent tous les deux contenir $1/7$.

4) Soustraction. Ici aussi un concept contraire.

$7 - 4 = 3$. Du plus grand, j'enlève un petit.

$1/3 - 1/4 = 1/12$. Du plus petit nombre au dénominateur, j'enlève un plus grand et j'obtiens un plus grand encore.

5) Division et multiplication : mêmes curiosités.

$8 : 2 = 4$. A l'arrivée, un plus petit nombre et une plus petite valeur.

$1/8 : 2 = 1/16$. A l'arrivée, un plus grand nombre, mais une plus petite valeur.

$8 \times 2 = 16$. A l'arrivée, un plus grand nombre et une plus grande valeur.
 $1/8 \times 2 = 1/4$ A l'arrivée, un plus petit nombre, mais une plus grande valeur.

En conclusion :

On oublie de faire découvrir à nos élèves que les fractions ne sont pas des quantités de "1". Nous le leur faisons découvrir dans les décompositions d'une grandeur.

-Prendre des tiers et des quarts de toutes sortes d'unités va créer des confusions : un "grand" quart de X sera plus grand qu'un "petit" tiers de Y. Dire aux élèves qu'il faut comparer des fractions qui proviennent de la même unité ? La belle affaire ! Depuis quand les élèves vous écoutent et retiennent mieux ce que vous dites plutôt que ce qu'ils ont fait concrètement ?

-Comprendre que 3 et 4, cela peut représenter des objets petits ou grands, lourds ou légers, noirs ou rouges est important, d'accord, mais ne contredit pas les opérations sur les nombres. Cette invariance numérique-là ne s'oppose pas à additionner 3 petites billes en plomb avec 4 grandes plumes, cela fera toujours 7 objets. Mais $1/3 + 1/4$, cela ne fera jamais des septièmes.

Bien sûr prendre des demis de toutes sortes d'unités va construire l'invariance du dénominateur ($1/2$ peut prendre des dimensions différentes). Mais cela n'a que peu d'intérêt : c'est seulement diviser en deux, c'est facile. Cela ne permet pas de comparer $1/4$ et $1/6$. Cela ne donne pas d'images mentales stables (que du contraire) pour sérier des dénominateurs et visualiser les résultats de nos opérations. Cela ne permet pas de comprendre que $1/3$ est plus grand que $1/4$ et plus grand que $1/12$. Cela ne permet pas d'additionner $2/2$ et $3/2$, cela ne permet pas de soustraire $3/2$ de $5/2$. Cela ne permet pas d'additionner $1/3$ et $1/4$.

La problématique des fractions n'est pas la même que celle des nombres entiers. Il ne faut pas appliquer aux fractions les mêmes recettes qu'aux nombres entiers.

Là où la problématique des fractions se rapprochent de celle des nombres entiers, c'est dans les cas tels que 3 cl + 4 dl, cela ne fait pas 7 cl. Et manger 3 pommes à 4 heures, ne signifie pas dépenser 7 euros. L'invariance numérique n'est ici aussi d'aucune utilité. Et on ne passe pas son temps à observer que 3 cl de lait occupe la même place que 3 cl de jus d'orange ou 3cl d'eau ou... En fraction c'est un peu plus utile, mais c'est si vite compris lorsque les élèves ont suivi un parcours qui donne du sens à la fraction nombre.

Avec des mesures de capacités ou autres grandeurs, les élèves doivent apprendre à transformer en grandeurs communes. C'est déjà un problème. Mais tellement plus facile car toujours en base 10 (l'heure excepté).

Avec les fractions, ce problème est beaucoup plus compliqué et prend une ampleur centrale. Ce sont des centaines de bases à calculer !

Il ne faut pas appliquer aux fractions les mêmes priorités qu'aux nombres entiers. Prendre des demis de toutes sortes d'unités, c'est diviser en deux, cela n'est pas compliqué et ça ne sert surtout à rien pour comprendre comment associer $1/3$ et $1/4$. Montrez-moi à quelle occasion, sur du matériel concret, AUTRE que des dessins ou des bouts de papier, nous divisons les tiers et les quarts en douzièmes ?

Les fractions sont plus compliquées, mais paradoxalement moins bien préparées et sans méthode adaptée à leurs spécificités. On leur applique certaines mêmes recettes qu'aux nombres entiers.

-Abordées plus tard. Heureusement les blocs spatiaux de Fractionary permettent de les aborder très ludiquement dès 3 ans.

-Manque de matériel concret et de matériel suffisamment structuré (sauf Fractionary).

-On se limite au début aux demis et aux quarts. Sauf avec Fractionary qui permet en plus de toucher, manipuler, comparer et transformer des tiers, sixièmes, neuvièmes, douzièmes et dix-huitièmes.

-On exerce peu concrètement et peu souvent la sériation. Sauf avec Fractionary qui permet de toucher 8 grandeurs et 28 comparaisons (si numérateur = 1, des centaines si numérateurs > 1) dès 3 ans. De les verbaliser et de les écrire pendant 2 ans (de 6 ans à 7 ans).

-On ne s'habitue pas assez à trouver concrètement des dénominateurs communs. Sauf avec Fractionary qui permet d'expérimenter et mémoriser 19 équivalences dans lesquelles on va puiser et chercher les dénominateurs communs et construire la loi.

- On ne compose et décompose pas assez concrètement. Sauf avec Fractionary qui permet de vérifier des centaines d'additions, soustractions, multiplications et divisions.

En résumé, bien que plus compliquées, les fractions ne sont utilisées ...

qu'épisodiquement,

avec peu de matériel,

pour des valeurs trop faciles (peu de morceaux : demis, quarts)

et trop peu variées (pas assez de dénominateurs différents).

Elles ne creusent donc pas leur propre canal de pensée !!

En conséquence, des confusions et des erreurs :

On sait différencier les quantités 9, 12 et 18,

mais on confond les grandeurs neuvièmes, douzièmes et dix-huitièmes.

On sait différencier 3 paquets de quatre et 4 paquets de trois,

mais on confond et on prend $\frac{3}{4}$ au lieu de $\frac{4}{3}$.

On sait que 12 est plus grand que 2,

mais on ignore que douzième est plus petit que demi.

On additionne des dénominateurs au lieu de chercher un dénominateur commun :

$(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7} !)$.

D'un plus petit, on soustrait un grand nombre fraction : $(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} !)$.

En divisant une fraction par un entier, on donne une fraction plus grande :

$(\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{3} !)$.

En multipliant une fraction par un entier, on donne une fraction plus petite :

$(\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{12} !)$.

On enseigne des trucs. Pour $\frac{1}{6} : 2$, tu fais 6×2 et tu obtiens $\frac{1}{12}$!

Il vaut mieux ne pas dire 6. 6 s'applique à des unités.

Dire sixième : 2 = douzième. Placer le sens sur la grandeur.

Ou utiliser "2 X plus petit" .

On retient des trucs, mais on ne les comprend pas et on inverse leurs usages. Et

quand on y ajoute d'autres concepts en algèbre, pour certains élèves, tout s'écroule. Les concepts insensés, hétéroclites sont trop nombreux, la mémoire ne suffit plus.

L'apprenant verse les fractions dans son premier canal de pensée : celui des nombres "simples" : 1 douzième = 12 et reste donc plus grand qu' 1 demi (=2).

Les erreurs peuvent ne pas apparaître en présence d'un concret limité ou avec quelques fractions trop simples. Mais elles apparaissent dès que l'on s'écarte du concret, des fractions simples et que sont abordées par écrit, sans support concret des fractions nouvelles.

Et ce ne sont pas quelques dessins et définitions comme "La valeur d'une fraction est inversement proportionnelle à la grandeur de son dénominateur." qui vont remédier au manque de référents concrets.

Pour creuser un canal de pensée spécifique aux fractions, avec des pensées réflexes correctes, il faut utiliser dès le début et suffisamment jeune un matériel concret contenant des fractions suffisamment nombreuses et suffisamment compliquées (beaucoup de morceaux).

Et les utiliser régulièrement.

Deuxièmement.

Demi et quart, c'est trop facile et trop peu pour penser et construire des concepts.

Si des fractions variées et plusieurs heures sont nécessaires pour distinguer numérateur et dénominateur et ne plus confondre $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ ou autres difficultés, il en faudra encore beaucoup plus pour la sériation. Et encore beaucoup d'autres pour les équivalences. Viendront enfin les lois sur les opérations.

Les étapes et les concepts sont nombreux.

Or tout se tient.

Autant commencer de suite avec un matériel complet. L'expérience a démontré qu'il était possible d'utiliser ce matériel complexe dès 3 ans. Puisque toute nouvelle découverte dépend des précédentes, plus les précédentes contiendront **en germes** les développements futurs, plus ce que nous pourrons en extraire sera riche.

Connaître par corps que douzième, ce n'est pas douze, que cela se ressemble mais est inversement proportionnel ; observer que $\frac{1}{2}$ (petits nombres) vaut plus que $\frac{6}{18}$ (grands nombres) sont des expériences qui doivent se toucher, se répéter et se diversifier sur des fractions nombreuses et avec des morceaux nombreux.

Faire comprendre à des classes d'élèves de 6 ans que $\frac{1}{2}$ vaut plus que $\frac{6}{18}$ (et autres cas) est une expérience réussie pour la première fois en mai 2008 lorsque furent imaginés 2 dés spéciaux et une règle de jeu adéquate utilisant différents matériels et permettant une implication affective dans un jeu. Affectif et ludique sont les clés de l'attention. Sinon pourquoi un élève de six ans s'intéresserait-il à comparer $\frac{6}{18}$ et $\frac{1}{2}$?

Pour sortir du canal dominant du nombre entier, il faut engranger beaucoup d'expériences dans ses mémoires corporelles et découvrir les lois spécifiques aux

fractions en approfondissant toujours plus un matériel qui s'y prête !

Pour sérier 2 ou 3 fractions simples, la mémoire suffit. Pas besoin de comprendre une loi.

Pour sérier un grand nombre, la mémoire ne suffit plus, on a besoin d'une pensée pour organiser logiquement ce que la mémoire ne retient plus. Pour exister, cette pensée doit se construire un guide, une loi.

Assimiler en profondeur les huit dénominateurs des blocs et les différents numérateurs dans l'oral et l'écrit, cela prend trois ans à raison de 30 minutes par quinze jours. Si l'apprenant commence jeune à manipuler, dire, lire et écrire 65 fractions (combinaisons courantes de numérateurs et dénominateurs avec les 8 figures du Fractionary), sa base d'acquis sera large.

Il pourra y puiser 19 cas d'équivalences pour illustrer ce concept d'équivalence.

L'illustrer largement dans le concret, puis largement dans l'oral et enfin largement dans l'écrit.

Car ce concept d'équivalence doit être largement illustré : c'est la mine indispensable dans laquelle nous viendrons puiser toutes les ressources pour bâtir les lois sur les opérations.

Quelques courtes descriptions d'activités

Pour nommer et sérier les blocs en fraction :

A partir de huit ans, si l'apprenant débute, le premier exercice pour nommer est tout simple (mais à 6 ans, la seule découverte des huit noms prend 10 X 15 minutes et se fait autrement) : "Prends 8 blocs, un de chaque couleur, et aligne-les du plus grand au plus petit. En considérant le plus grand comme unité, cherche la valeur fraction, comparativement à lui, des 7 autres blocs. "

Afin d'entraîner votre connaissance, mettez-vous par deux. Prenez la fiche de questions-réponses "Brevet 1 Savoir Lever". Choisissez chacun votre rôle : qui va lire et qui va lever ? Tandis que l'un lit une fraction, l'autre lève la forme correspondante et dit la couleur (bizarre : remarquez-vous ce petit moment d'attente avant de savoir dire la couleur ?). Après trois minutes, à quelle fraction êtes-vous arrivés ? Dans un second temps, l'un dit le nom en couleur de la forme, l'autre lève le bloc et lui répond par la fraction.

Dans un troisième temps, le lecteur alterne nom en couleur et nom en fraction ; l'autre lève le bloc et nomme contraire : il dit fraction s'il a entendu couleur, il dit couleur s'il a entendu fraction.

Un autre exercice pour nommer va lui demander d'identifier les formes utilisées sur une fiche pour illustrer un oiseau (ou une autre figurine), de les nommer en fractions et enfin de les compter couleur par couleur pour les écrire en fraction. Toutes celles d'une même couleur sur une seule barre de fraction. IL écrit les fractions les unes à la suite des autres, des plus gros blocs aux plus petits (sériation).

Un autre exercice consiste à remplir lui-même un plateau de figurine avec des blocs

qu'il choisit (au moins cinq couleurs) et de les écrire ensuite en fractions. Toutes celles d'une même couleur sur une seule barre de fraction. IL écrit les fractions les unes à la suite des autres, des plus gros blocs aux plus petits (sériation).

Un jeu utilise des dés avec les noms en fraction. Gagne celui qui obtient un nom de bloc plus gros que les autres. Avec ce jeu, mais avec les blocs à prendre en mains et dans le contexte des autres apprentissages nommés ci-avant, même à six ans, on retient assez vite que le petit "2" du demi représente une quantité plus grande que le gros "18" du dix-huitième.

3) 3ème stade : Les 19 équivalences.

Maintenant qu'il commence à maîtriser les noms et à sérier les valeurs, il est temps de passer à la vitesse supérieure. Autant une forme complexe comme l'oiseau peut être composée d'une multitude de pièces, autant chaque pièce peut elle-même être décomposée avec les pièces plus petites du Fractionary.

Voici deux exercices.

D'abord prendre le tiers : le losange rouge et essayer de le reconstituer avec les autres pièces. Il existe 8 solutions (4 équivalences et 4 décompositions additives). C'est ce qu'on appelle le carrousel du tiers. Une fois que l'apprenant a terminé, il se lance dans le carrousel du demi... il y a 19 possibilités (4 équivalences et 15 décompositions additives). Ensuite il peut se lancer dans le carrousel de l'unité, il n'y a que 237 manières de faire?!?! Remarque : jaune + rouge + bleu foncé ou rouge + bleu foncé + jaune et autres ordres = une seule solution !

Une manière de travailler plus essentielle est de fabriquer des tours de rapports 2, 3, 4, 6, 9, 12 et 18.

Concrètement pour faire une tour de rapport 2, prendre une pièce comme socle (l'hexagone pour commencer, c'est en général plus facile) et avec deux pièces identiques d'une autre couleur essayer de couvrir entièrement le socle.

Prendre ensuite une autre pièce comme socle et faire de même. Il existe 5 tours de rapport 2 (1 est à démontrer).

5 tours de rapport 3

2 tours de rapport 4

3 tours de rapport 6

2 tours de rapport 9

1 tour de rapport 12

et une tour de rapport 18

Bon amusement et bon casse-tête!

Les 19 équivalences sont à connaître par corps et par cœur.

Lorsque l'apprenant saura les construire toutes en 15 minutes, groupées par rapport et sériées, il ne placera plus qu'un bloc sur chacun des 19 socles (On les appelle les 19 tours suggérées). Il apprendra à placer les 19 sommets en maximum 2 minutes, sans

erreur de groupe de rapport. Peut-être sera-t-il parmi les champions capables de lire en fractions les 19 tours suggérées en maximum 1 minute. De les écrire, groupées et sériées en maximum 3 minutes.

Pour aller si vite, ses doigts n'auront plus le temps de tâtonner ; ce sont ses mémoires corporelles et mentales qui le guideront. Mais pourquoi ces chronos ?

Sa vitesse d'exécution indique sa vitesse de pensée et sa facilité d'accès aux exemples.

Son bénéfice est double :

- Sa facilité d'accès à tous les exemples nous garantit qu'il y fera appel lorsqu'il en aura besoin parce que c'est facile et rapide.
- Sa vitesse de pensée libérera assez de place dans sa mémoire de travail et il pourra consacrer toute son attention pour traiter les exercices d'analyses et d'observations pour la construction des nouvelles lois mathématiques.

Pourquoi grouper et sérier les 19 tours ?

S'il sait sérier, il connaît la grandeur de la valeur.

Il pourra évaluer la justesse de ses futurs calculs.

S'il sait grouper, il reconnaît les rapports.

Il divisera correctement lors de la recherche future de dénominateurs communs.

4) 4ème stade : La construction des lois.

A ce stade, vous connaissez les fractions contenues dans les 19 équivalences en actions, en paroles, en écrits et en pensées. Reste maintenant à extraire de tout cela les lois sur les quatre opérations.

L'apprenant va observer qu'additionner des dénominateurs, cela donne toujours un résultat faux et plus petit. Qu'il faut d'abord réduire au même dénominateur.

Que pour réduire au même dénominateur, il doit agir par multiplication ou division sur le numérateur et/ou le dénominateur.

Il va observer que diviser une fraction par un nombre entier peut s'opérer soit en conservant la grandeur des parts et en divisant le nombre de parts prises, soit en conservant le nombre de parts prises et en divisant la grandeur.

Il comprendra ces lois et d'autres encore en exploitant ses connaissances des 19 équivalences.

Il saura trouver le résultat d'une opération sur une fraction écrite car la fraction écrite de départ et la fraction écrite d'arrivée auront pour lui un sens de grandeur. Il saura mentalement comparer la valeur de ces deux fractions prises dans les 19 équivalences ou les +/- 65 fractions écrites qu'il connaît si bien. Il saura estimer si ce qu'il obtient correspond à l'action de l'opération.

5) 5ème stade : La généralisation.

Vient enfin la dernière étape. Abandonner les blocs pour se lancer dans les exercices proposés par tous les manuels de mathématiques. A ce stade, il convient encore d'accompagner l'enfant dans le transfert d'apprentissages depuis une expérience concrète des mathématiques vers l'abstraction mathématique. Mais à ce stade, la méthode montre toute sa puissance: les enfants qui maîtrisent les stades précédents transfèrent facilement.

Remarques

-Une leçon est toujours multiple. Du libre et du dirigé (de plus en plus). Du concret et de l'écrit (de plus en plus).

-Les leçons se complexifient toujours plus en partant du même matériel.

A trois ans, les manipulations et structurations spatiales (glissements, rotations, retournements,...) sont progressivement complétées par des équivalences verbalisées par les couleurs : il faut 2 jaunes ou trois mauves pour remplacer un rouge.

On va sérier : le rose est plus petit que le jaune. Le jaune est plus grand que le rose, mais plus petit que le rouge.

A 6 ans, on va nommer en fraction un tiers vaut 2 sixième, mais aussi sérier : un tiers est plus grand qu'un sixième. On va jouer que $1/2$ vaut plus que $6/18$.

A 7 ans, on va déjà construire des groupes de rapport : les 4 rapports 2, lire et écrire des équivalences : $1/3 = 2/6$, $1/3 = 3/9$, je donne $6/9$ à la banque et je reçois $2/3$. On va sérier en écrivant des plus gros aux plus petits les blocs utilisés pour remplir un plateau.

A 8 ans, on va systématiser la construction des 19 tours d'équivalence. Les écrire. Etc...

Pécheny Marc.