

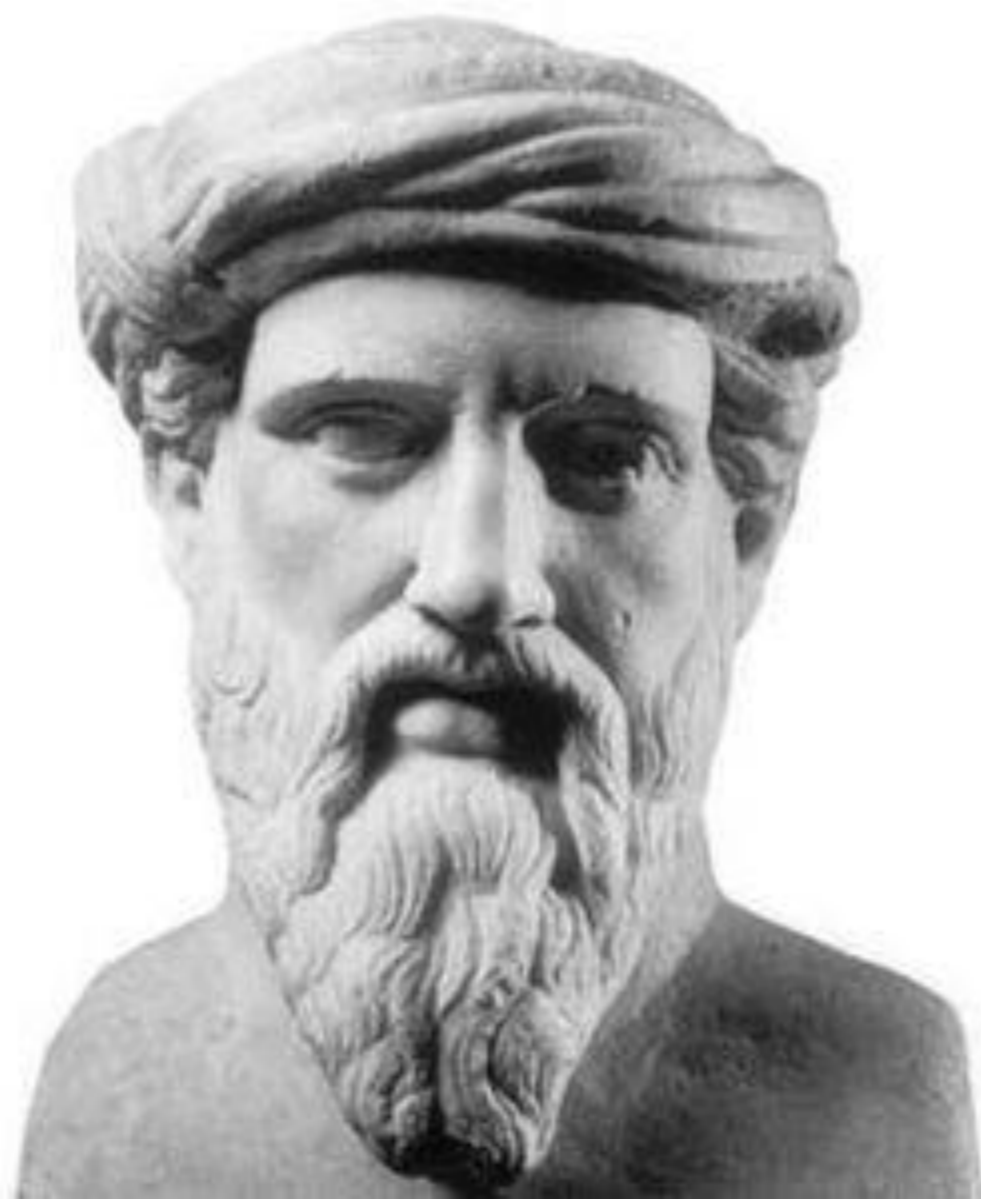
Mathémusique

Département de Mathématique

Yassine EL GHAMRY, Candy MAHIRWE, Carole MULLER et Yannick THIRY

Origine

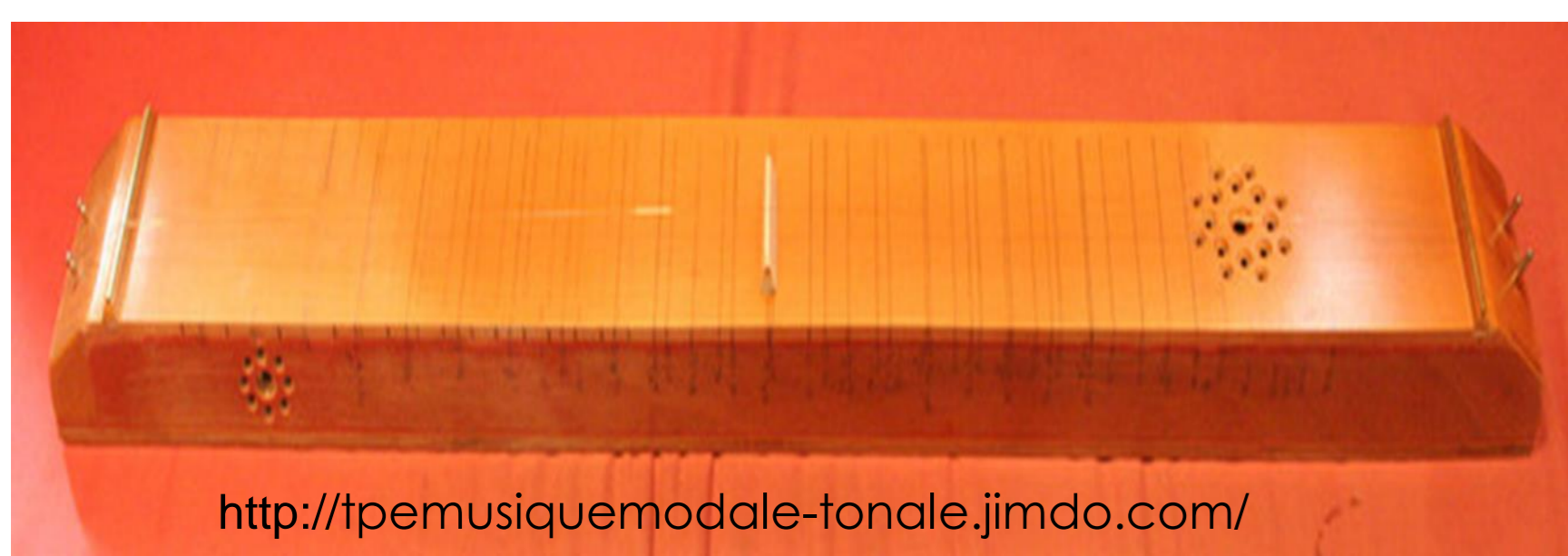
Pythagore
(V^e siècle av. J.C.)



<http://classe4today.canalblog.com/>

Gamme pythagoricienne

Gamme musicale construite exclusivement sur des intervalles de quintes pures (3^{ème} harmonique)

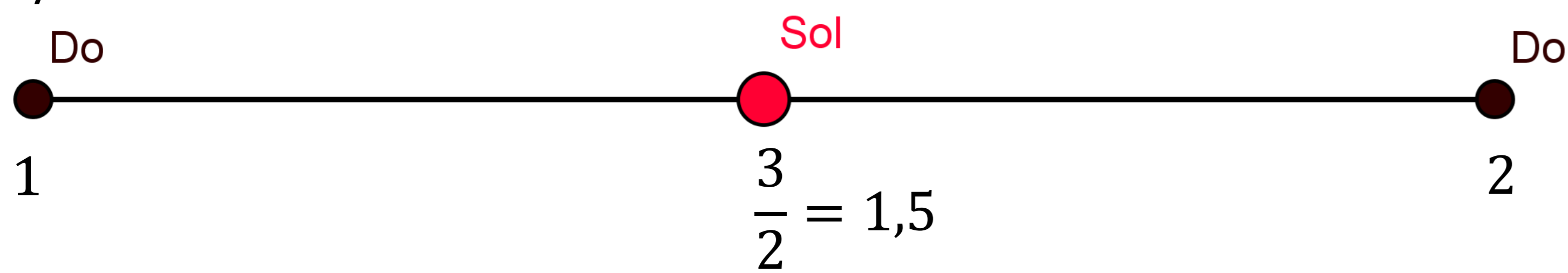


<http://ipemusiquemodale-tonale.jimdo.com/>

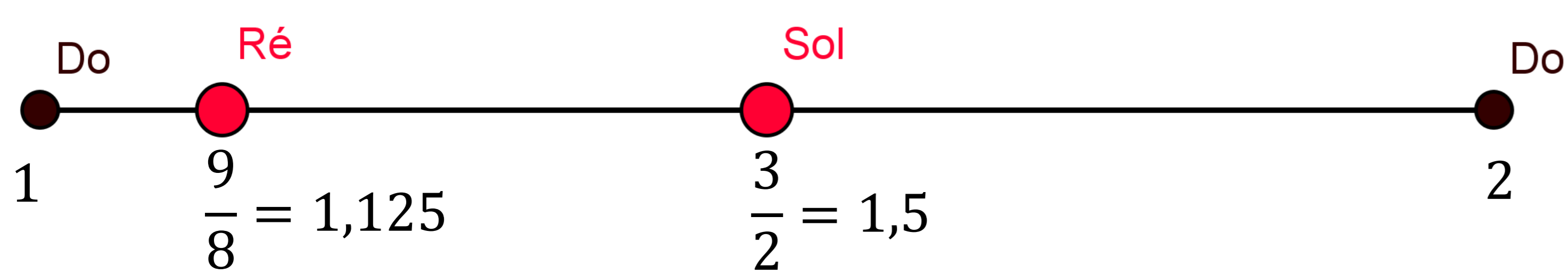
Le monochorde est une simple corde tendue sur une caisse de résonance.

Construction de la gamme

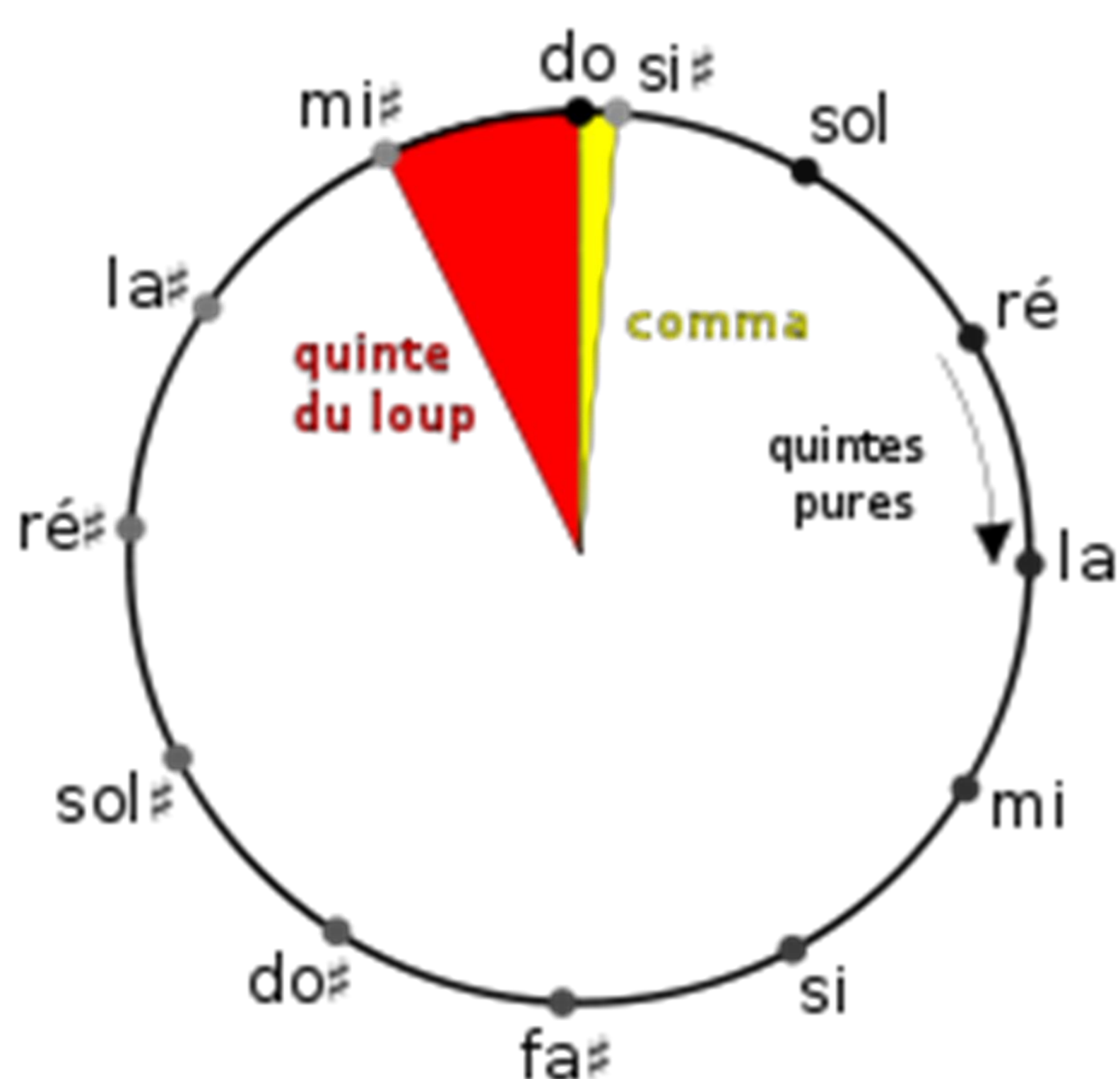
Si l'on part du Do comme note fondamentale (fréquence 1), la première quinte a pour fréquence 3/2.



La deuxième quinte a pour fréquence 9/4 qui, une fois normalisée, donne 9/8.



À la 12^{ème} quinte, on tombe sur une note très proche de la note prise au départ. On tombe en fait presque sur la même note, mais 7 octaves plus haut.



<http://fr.wikipedia.org/>

Monter de 7 octaves donne : $2^7 = 128$
Et d'un autre côté, quand on monte de 12 quintes, on a : $(3/2)^{12} \approx 129.75$
L'écart entre ces deux valeurs s'appelle le **comma pythagorien**.

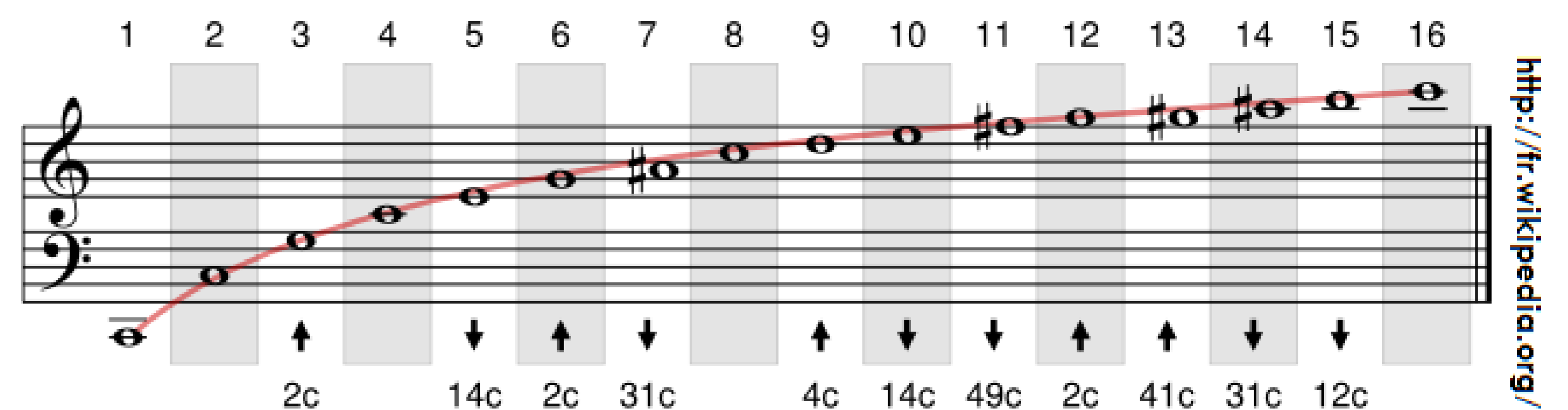
Harmoniques et logarithmes

Soit D_{o_0} la fréquence de la note fondamentale. Alors,

$$\frac{D_{o_1}}{D_{o_0}} = 2, \frac{D_{o_2}}{D_{o_0}} = 2^2, \dots, \frac{D_{o_n}}{D_{o_0}} = 2^n.$$

On peut calculer la fréquence de D_{o_n} avec D_{o_0} .

En général, $a^x = a \cdot a \dots \cdot a$ est appelé **exponentielle**.



<http://fr.wikipedia.org/>

Inversement, connaissant 2 fréquences, on peut calculer l'intervalle entre eux avec le **logarithme**. Il est défini tel que $x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$.

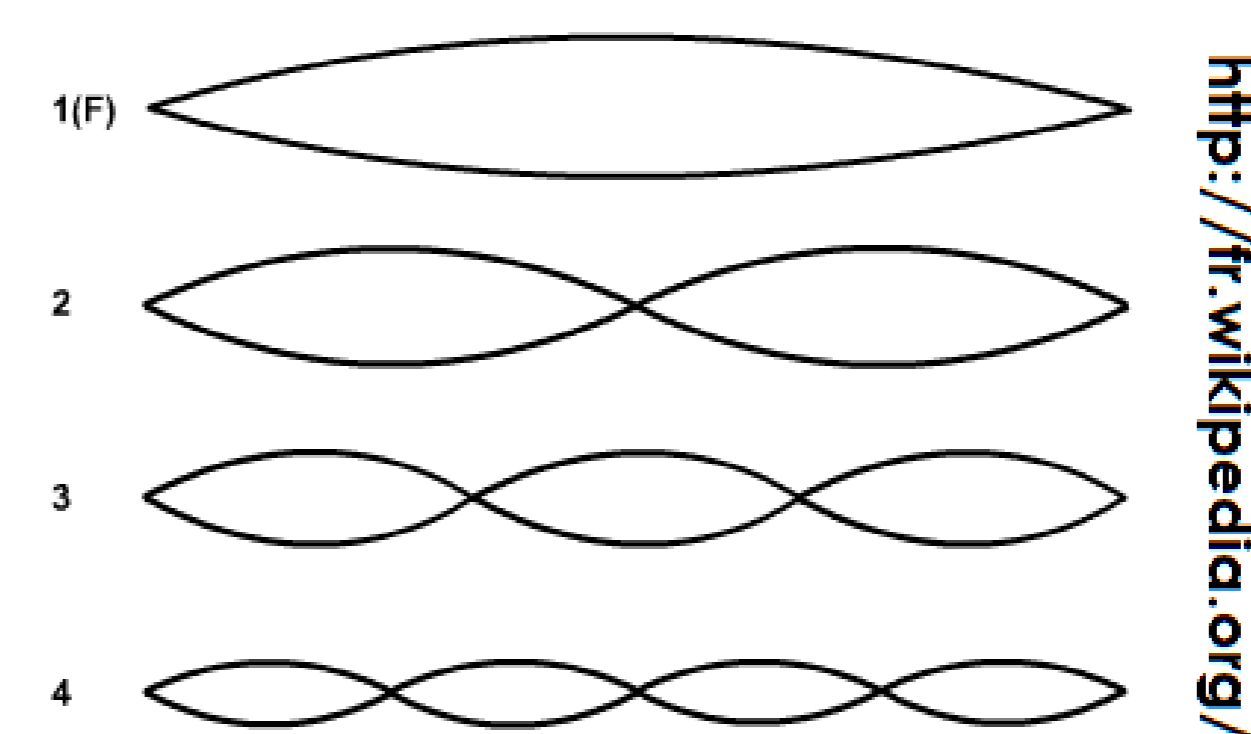
Application aux instruments

Instruments à cordes

La fréquence f du son émis est réglée par la tension F_T , la longueur l et la masse linéique μ de la corde selon

$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

n est le nombre de ventres. Si $n = 1$, on a le son fondamental, sinon on obtient des harmoniques.



<http://fr.wikipedia.org/>

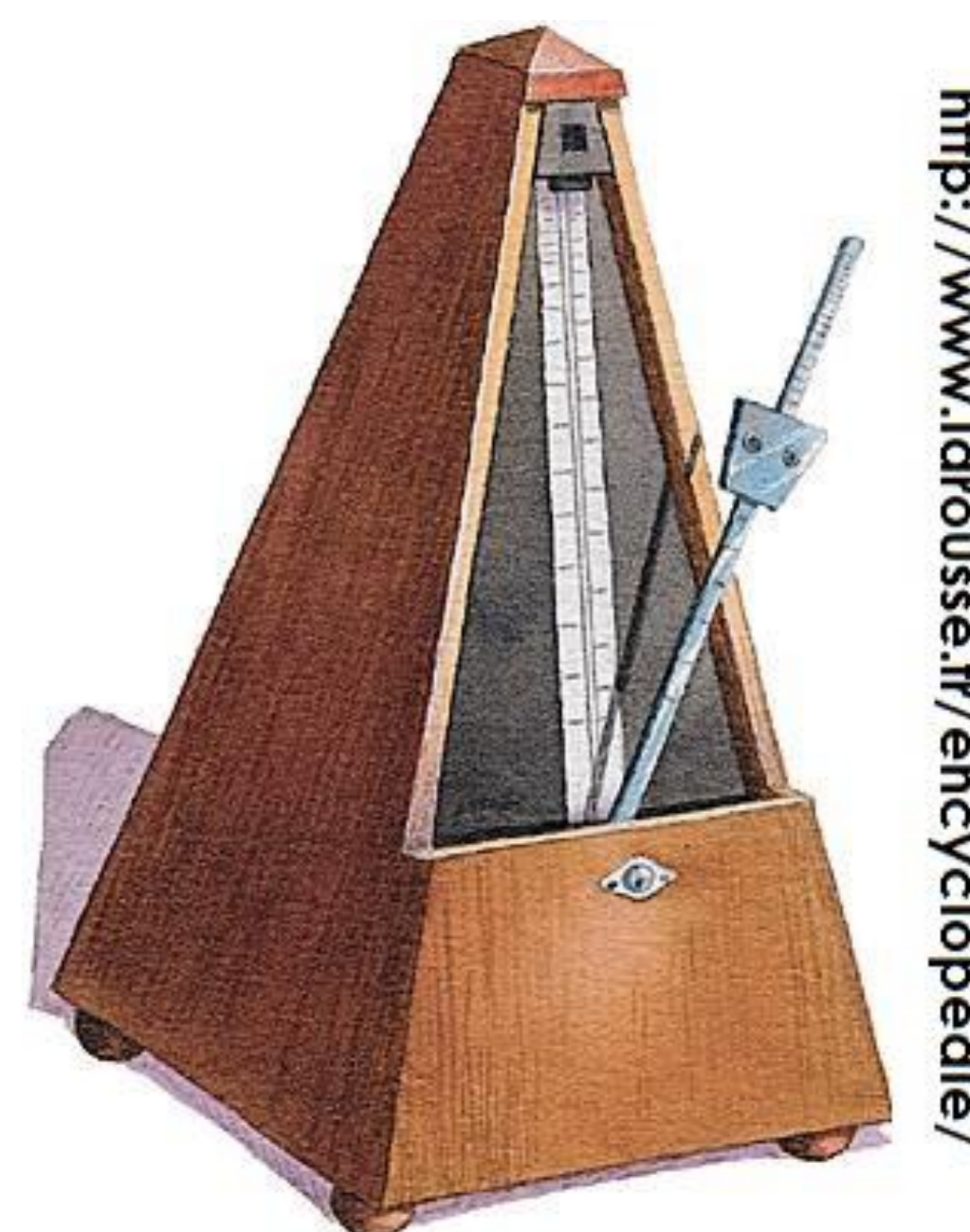
Métronome

Il fonctionne comme un pendule simple et donne le tempo. La période T est indépendante de la masse et proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la corde l .

g est la constante de gravité



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



<http://www.larousse.fr/encyclopedie/>

Mathémusique

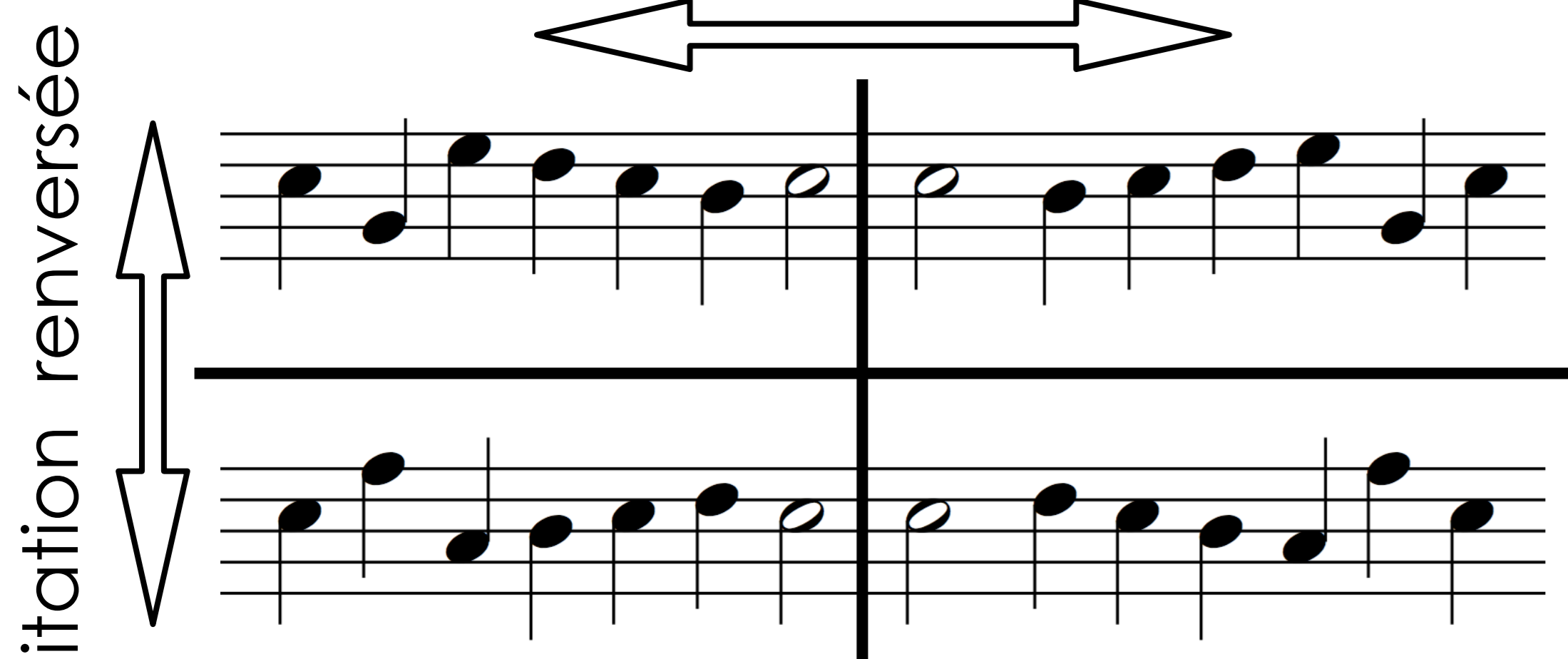
Département de Mathématique

Yassine EL GHAMRY, Candy MAHIRWE, Carole MULLER et Yannick THIRY

Méthodes de compositions

Isométries et groupes

imitation rétrograde



- Isométries**
- translation
 - transposition
 - symétrie

translation + transposition



Extrait de Prélude et Fugue Nr. 6 en Ré mineur, BWV 851, de Jean-Sébastien Bach

Dodécaphonisme

Transposition de k demi-tons:

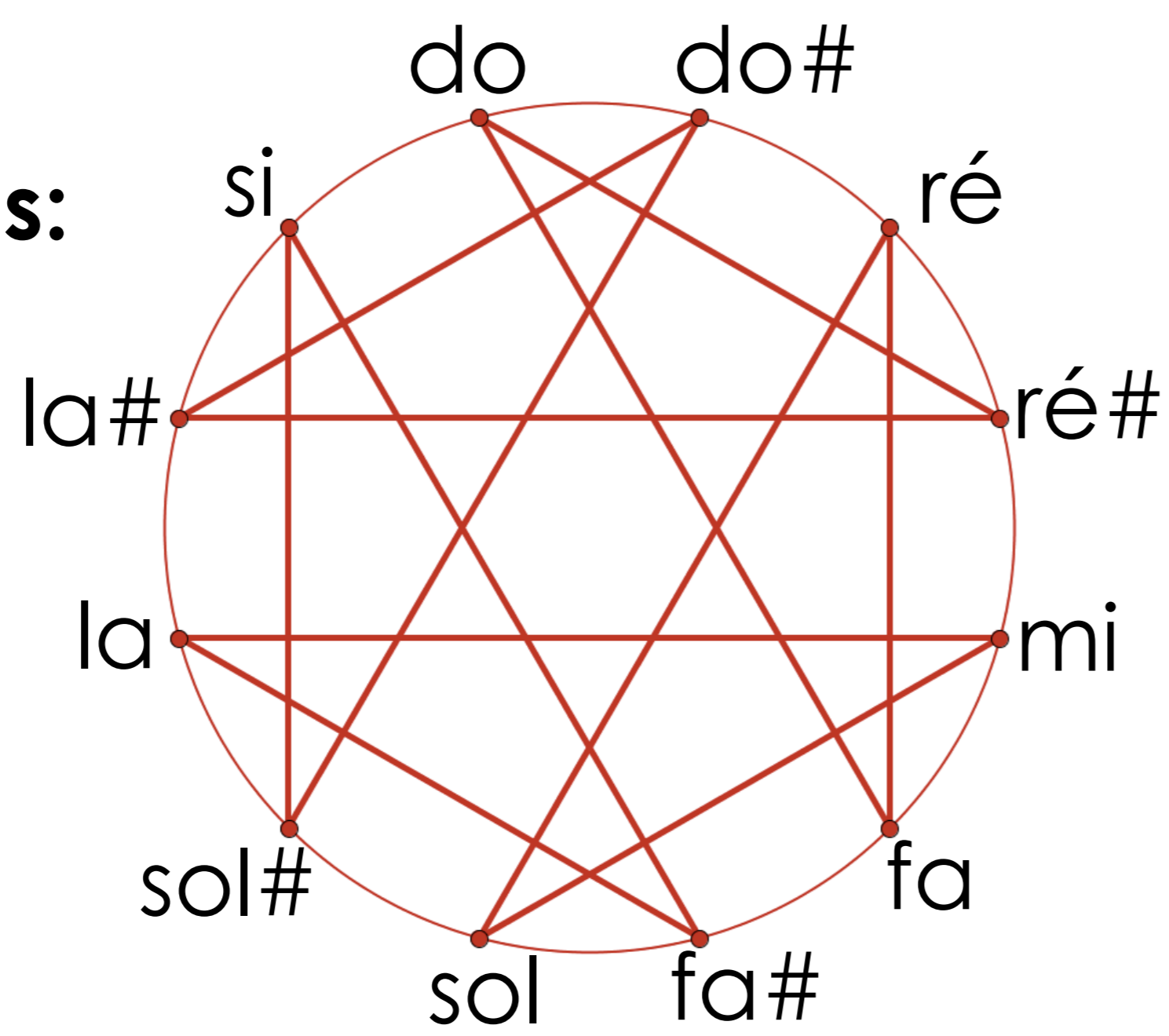
élément de la série + k
rotation de $k \cdot 30^\circ$

Renversement:

inverse dans \mathbb{Z}_{12}

Rétrograde:

lecture de droite
à gauche



Série de base:

0 3 10 1 8 11 6 9 4 7 2 5

Série renversée:

0 9 2 11 4 1 6 3 8 5 10 7



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
do do# ré ré# mi fa fa# sol sol# la la# si

La gamme tempérée

Définition

L'octave est subdivisée en 12 intervalles égaux. Ainsi le rapport entre les fréquences f_1 et f_2 de deux notes consécutives est constant.

Ces 12 notes sont: do, do#, ré, ré#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si

$$\frac{f_1}{f_2} = 2^{\frac{1}{12}}$$

Comment diviser l'octave en douze demi-tons égaux?

La valeur du demi-ton est égale à $2^{\frac{1}{12}}$. Le ton est un intervalle de 2 demi-tons: il vaut $2^{\frac{1}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{2}{12}}$. En généralisant, deux notes sont séparées de n demi-tons si le rapport de leurs fréquences est $2^{\frac{n}{12}}$.

Notes	GAMME			
	PYTHAGORE		TEMPEREE	
	Rapports (fractionnaires)	Rapports (décimales)	Rapports (puissances)	Rapports (décimales)
DO	1	1	2	1
DO#		1,068	$2^{(1/12)}$	1,059
RE	9/8	1,125	$2^{(2/12)}$	1,122
RE#		1,201	$2^{(3/12)}$	1,189
MI	81/64	1,266	$2^{(4/12)}$	1,259
FA	4/3	1,333	$2^{(5/12)}$	1,334
SOL	3/2	1,500	$2^{(7/12)}$	1,498
LA	27/26	1,688	$2^{(9/12)}$	1,681
SI	243/128	1,898	$2^{(11/12)}$	1,887
DO	2	2	2	2

Musique Stochastique

Chaîne de Markov:

une suite d'événements où le prochain est entièrement déterminé par le présent.

Loi de Poisson

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Matrice de Transition		do#	ré	mi	fa	sol	sib
do#	0	1	0	0	0	0	0
ré	1/3	0	1/3	0	0	0	1/3
mi	0	0	0	1	0	0	0
fa	0	1/2	0	0	1/2	0	0
sol	0	0	1	0	0	0	0
sib	0	0	0	0	1	0	0

