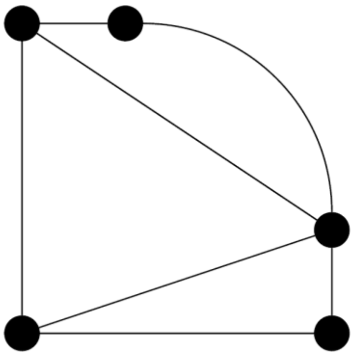
Les graphes en un coup de pinceau

Faculté des Sciences – Département de mathématique
Emma Jordan, Fränk Plein, Mélina Van Weverberg, Adrien Vandenschrick

La coloration d'une carte, la création d'un horaire, le choix de fréquences d'antennes réseaux et la résolution d'un sudoku, voilà des problèmes qui à première vue semblent ne rien avoir en commun. Pourtant, tous peuvent être traités au moyen d'une seule théorie, la théorie de coloration des graphes. Qu'est-ce qu'un graphe ?

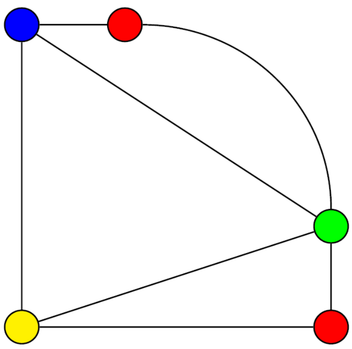
Les graphes furent introduits au milieu du 18ème siècle par Euler. Pour dessiner un graphe, rien de plus simple, il vous suffit de tracer quelques points que nous appellerons sommets, et il ne vous reste plus qu'à relier ces points. Vous n'êtes pas obligés de tous les relier. Voici notre graphe :

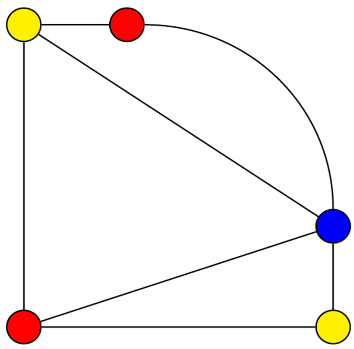


Pour bien mettre les sommets en évidence, nous avons mis de grosses pastilles noires. Notons qu'ici, deux arêtes distinctes ne se croisent jamais (à part sur les sommets). Les graphes qu'on peut représenter de façon à ce qu'ils vérifient cette propriété sont dits planaires. On dispose d'un théorème de Fáry qui affirme la chose suivante : un graphe planaire peut toujours être représenté de façon à ce que toutes ses arêtes soient des segments de droites qui ne se croisent pas (à part en leurs extrémités).

De la même façon qu''il y a des graphes planaires, il y a aussi des graphes non planaires. En voici un exemple simple : considérons un graphe composé de cinq sommets et relions tous les sommets les uns aux autres par des arêtes. Vous constaterez qu'il est impossible de le faire sans qu'aucune arête ne se croise. Ce graphe porte le nom de K5. En général, un graphe est non planaire si et seulement s'il ne contient ni K5 ni K3,3 comme mineur. Il s'agit d'un théorème de Wagner prouvé en 1937.

Tantôt, nous avons parlé de coloration de graphe. Vous pouvez donc vous demander ce que l'on va colorer. Et bien, ce sont les sommets que nous allons colorer. On a juste une exigence : il ne faut pas colorer deux sommets reliés avec la même couleur. Voici deux colorations possibles de notre graphe :

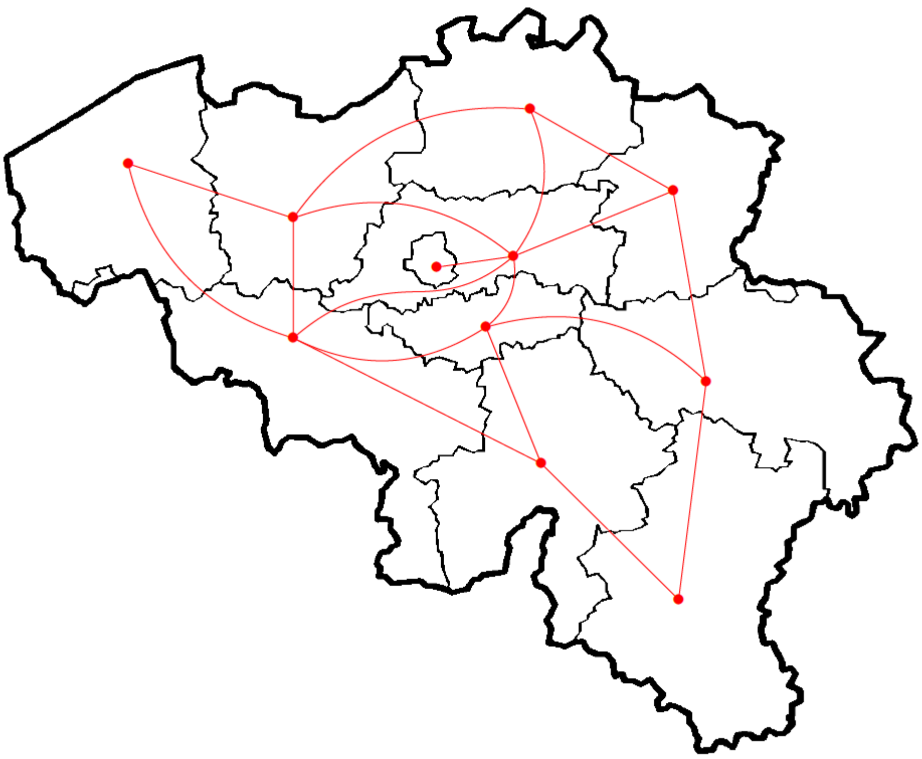




Qu'est-ce qui a suscité l'intérêt des mathématiciens vis-à-vis de ces colorations ? C'est une question posée par Francis Guthrie en 1852 : est-il possible de colorer une carte avec quatre couleurs de façon à ce que deux pays limitrophes soient de couleurs différentes ? Cette question fut appelée conjecture des quatre couleurs. C'est seulement en 1977 que Kenneth Appel et Wolfgang Haken, deux mathématiciens américains, ont répondu par l'affirmative à cette question, et que la conjecture des quatre couleurs devint le théorème des quatre couleurs. Cette preuve se distingue dans la mesure où elle est l'une des premières à être résolue en grande partie grâce à un ordinateur.

Avant que cette preuve n'arrive, de nombreuses preuves erronées avaient vu le jour. Bien que fausses, ces preuves ont contribué au développement de la théorie des graphes. De même, de nombreux résultats partiels ont été démontrés. Au nombre de ces résultats figure le suivant, dû à Percy Heawood : « il est possible de colorer une carte avec cinq couleurs de façon à ce que deux pays limitrophes soient de couleurs différentes ». Bien que très similaire au théorème des quatre couleurs, ce résultat est bien plus simple à démontrer.

Pour arriver à résoudre ces questions, ils utilisèrent le formalisme de la théorie des graphes : ils identifièrent chaque pays au sommet d'un graphe et relièrent deux sommets si et seulement si les pays correspondants étaient limitrophes. Le graphe obtenu de cette manière porte un nom : on l'appelle le graphe dual de la carte. Vous pouvez voir ci-dessous le graphe associé aux provinces de Belgique.



De nos jours, on est encore à la recherche d'algorithme, c'est-à-dire d'une méthode, pour colorer les graphes en essayant de le faire avec le moins de couleurs possibles et le plus rapidement possible.

En plus du théorème des quatre couleurs, de nombreuses questions similaires ont vu le jour. Vous êtes-vous déjà demandé de combien de couleurs on aurait besoin pour colorer la carte du monde si notre planète était un tore ? On connaît aussi la réponse à cette question. Avez-vous une idée de la réponse ? Et si les pays possédaient des colonies dans le monde et que l'on demandait que les colonies aient la même couleur que le pays dont elles dépendent, de combien de couleurs aurait-on besoin ?

Voici un indice pour la création d'un horaire : on peut lui associer un graphe dont les sommets sont les cours. À chaque couleur correspond une plage horaire. On relie deux sommets si deux cours ont le même professeur ou des élèves en commun ou si les deux cours sont censés avoir lieu dans la même salle.

Maintenant que vous savez comment modéliser le problème des horaires par une coloration de graphes, voyez-vous comment la théorie des graphe intervient dans le choix de fréquences d'antennes réseaux et la résolution d'un sudoku ?