

Origine commune

Au cours de l'histoire, les échanges entre la musique et les mathématiques furent fréquents. Les mathématiques offrent un langage qui permet de décrire et de mieux comprendre certains aspects de la musique : la construction d'une gamme en est un exemple. Mais l'apport des mathématiques ne se limite pas à la théorie. On le retrouve dans des aspects pratiques ou encore dans des questions esthétiques liées à la composition musicale.

La gamme pythagoricienne

En musique, une gamme musicale est un ensemble de notes conjointes s'étendant sur une octave (étant donné un son pur possédant une seule fréquence, le son de fréquence double est appelé l'octave et on lui attribue le même nom). Pythagore et ses disciples construisent alors une échelle musicale en superposant des quintes. La quinte est associée à la troisième harmonique :

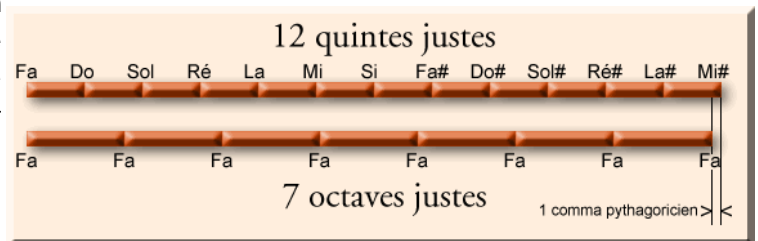


Figure 1 : <http://www.chorale-cote-des-legendes.com/>

un son d'une fréquence triple. De proche en proche, ils construisent des sons dont les fréquences, ramenées dans l'octave (entre 1 et 2) ont pour valeur des quotients de puissances de 3 (quintes ou 3e harmoniques) par des puissances de 2 (pour les ramener dans l'intervalle choisi). En continuant ainsi, on retombe à la 12e quinte sur une note proche de celle de départ. Bien évidemment, il ne s'agit pas d'un cycle, car une telle suite ne peut redonner la valeur 1. En effet, il faudrait qu'une puissance entière positive de 3 soit égale à une puissance entière positive de 2, ce qui est impossible.

La gamme tempérée

En réalité, de la même façon que l'humanité nous offre bien des langages différents, elle nous offre des langages musicaux différents, dans lesquels les définitions de tons et de demi-tons varient beaucoup. Dans la gamme tempérée, les tons sont tous identiques, le demi-ton vaut exactement la moitié d'un ton. L'octave possède 12 demi-tons, et donc on considère qu'un Ré# et un Mi♭ forment le même son, de même pour un Mi# et un Fa...



Comment diviser l'octave en douze demi-tons égaux?

J.S. Bach, promoteur de cette nouvelle gamme, nous répond avec une précision mathématique, claire et sans surprise : "L'octave est caractérisée par le nombre 2 qui est le rapport entre les fréquences de deux

notes distantes d'une octave". Il s'agit d'un rapport, c'est-à-dire d'une division.

$$\frac{RE\flat}{DO} = \frac{RE}{RE\flat} = \frac{MI\flat}{RE} = \frac{MI}{MI\flat} = \frac{FA}{MI} = \frac{SOL\flat}{FA} = \frac{SOL}{SOL\flat} = \frac{LA\flat}{SOL} = \frac{LA}{LA\flat} = \frac{SI\flat}{LA} = \frac{SI}{SI\flat} = \frac{DO}{SI}$$

Si on prend r comme étant le rapport de n'importe quel intervalle, r^2 sera le rapport de l'intervalle $Do-Mi\flat$. Ainsi de suite, en multipliant, on obtient les douze intervalles.

$$\begin{aligned} r^{12} &= 2 \\ r &= \sqrt[12]{2} \\ r &= 1.059463094 \end{aligned}$$

Chaque demi-ton tempéré correspond à la racine douzième de deux. C'est le nombre par lequel il faut multiplier (et non ajouter) la fréquence d'une note quelconque pour monter d'un demi-ton. En montant une deuxième fois d'un demi-ton, on a le rapport $\sqrt[12]{2^2} = 2^{2/12} = 1,12246$ pour un ton. Et ainsi de suite, jusqu'à retrouver 2 lorsqu'on a multiplié 12 fois.

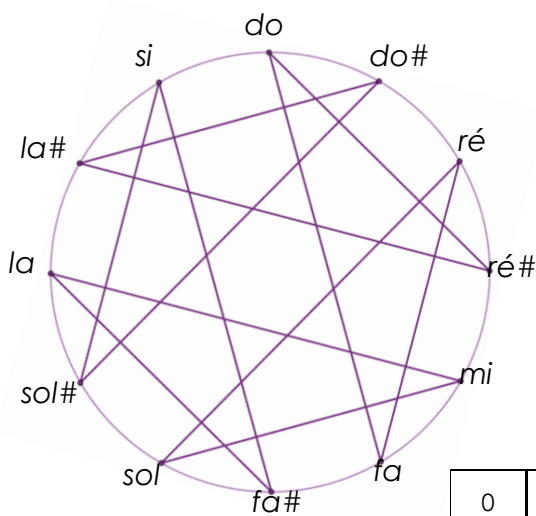
Méthodes de composition

A partir de la musique, nous pouvons établir les notions de groupes et d'isométries comme les symétries et les translations. Ces transformations sont souvent utilisées dans les œuvres de beaucoup de compositeurs célèbres comme Bach, Mozart, ...

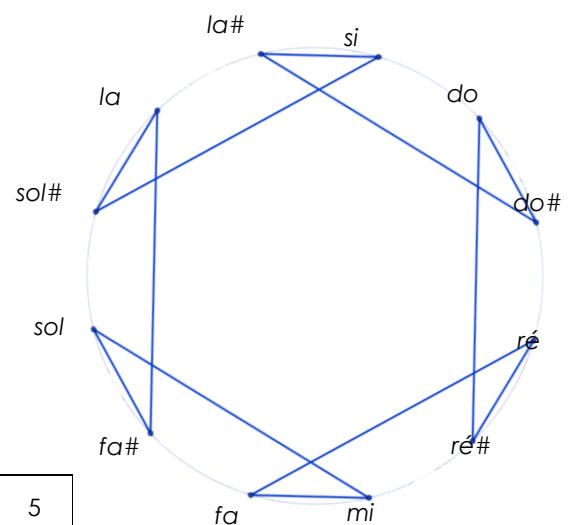


Dodécaphonisme

Le dodécaphonisme est une méthode de composition qui utilise le groupe cyclique Z_{12} . À chaque élément est associée une des douze notes de la gamme chromatique. Puis nous fixons une série contenant toutes les notes une seule fois. Cette série sera soumise à différentes manipulations afin d'en obtenir 48 versions qui seront utilisées pour composer.



0	1	2	3	4	5
do	do#	ré	ré#	mi	fa



Musique stochastique

Elle utilise des lois probabilistes et des processus stochastiques pour créer de nouveaux morceaux. La loi de Poisson, appliquée à des problèmes d'urnes où les boules sont les notes, les nuances et autres éléments musicaux, mène à des mélodies particulières et aléatoires.

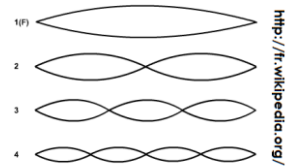
Une autre méthode pour composer une nouvelle phrase musicale à partir d'une autre utilise les chaînes de Markov qui décrivent une suite aléatoire d'événements.

Et les instruments ?

Comme Pythagore l'avait déjà remarqué, le son émis par une corde varie selon sa longueur. Connaissant alors les différentes relations entre les intervalles, comment construire les instruments pour obtenir les sons voulus ?

Le principe pour les instruments à cordes est simple : il suffit de raccourcir la corde ou de changer la tension. Les instruments à vent avec des clefs (comme la flûte) raccourcissent la colonne d'air. Les cuivres n'ont que 3 ou 4 pistons et utilisent les harmoniques pour jouer toutes les notes.

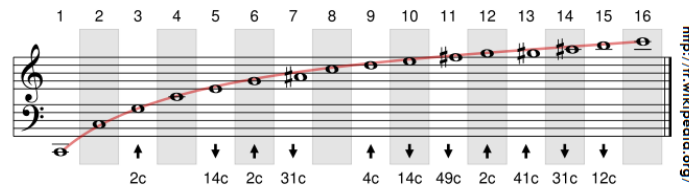
Les harmoniques d'une note fondamentale apparaissent si on divise la colonne d'air (ou une corde) en morceaux de même taille.



Elles permettent aussi de faire une petite introduction à la notion de logarithme qui lie progression linéaire et croissance exponentielle.



<http://www.larousse.fr/encyclopedie/>



Un dernier point de l'exposé sera une étude du fonctionnement d'un métronome dont le mouvement est semblable à celui d'un pendule. La mécanique, réunissant mathématique et physique, permet de décrire le mouvement de celui-ci ainsi que de calculer sa période, fréquence,... en fonction de la longueur de la tige.