Et si un cube était une sphère

Faculté des Sciences – Département de mathématique
X. Mauquoy, D. Timmermans, P. Tranchida et M. Tsishyn

Introduction

Qu'est-ce que la topologie ? Pour saisir le sens de ce concept, prenons le mythe de la caverne de Platon. Quel est le lien avec les mathématiques ? Nous établissons ici un parallèle entre le monde des pensées du philosophe et la topologie. Dans celui-ci, contrairement au monde réel, tangible, les objets sont uniques au sens conceptuel (un concept unique désigne un et un seul objet). Ainsi, le concept « fourchette » est univoque, bien que l'on puisse considérer une multitude de fourchettes différentes, déformées, anciennes, neuves, en argent, en acier,… Le lien se fait ici avec la topologie, où nous considérons les objets comme déformables, modelables, élastiques (sans déchirure ni collage) en étudiant les propriétés topologiques. Plus rigoureusement, on dit que deux formes sont équivalentes à « homéomorphisme » près, c'est-à-dire qu'il existe une application continue (plus ou moins « régulière », sans brisure ni saut brusque) qui « envoie » une forme sur l'autre. L'idée principale de la topologie est de considérer des objets de façon dépouillée, plus fondamentale, en s'abstenant de considérer des mesures,…

Homéomorphisme

Illustrons le premier paragraphe par des exemples. D'un point de vue topologique, une sphère et un cube sont en réalité le même objet car il existe un homéomorphisme qui permet de passer de l'un à l'autre. En effet, en courbant toutes les arêtes du cube ainsi que ses faces, on peut se ramener à une sphère (comme si on le gonflait) et inversement, en aplanissant celle-ci. De la même manière, tous les polyèdres convexes sans trou (pyramide, tétraèdre, octaèdre,…), un œuf,… sont des sphères topologiques. Cependant, une sphère et un tore (forme semblable à un donut) sont des objets distincts et ce, en raison du trou que possède ce dernier. Il n'est en effet pas possible d'établir une déformation « continue » pour faire disparaître ou apparaître un trou dans une forme géométrique : on est obligé de déchirer, coller,… ce qui modifie les propriétés.

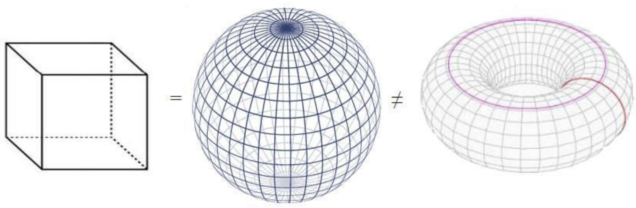

Figure 1

Orientabilité

Abordons maintenant l'orientabilité, une propriété fondamentale des surfaces. Pour comprendre intuitivement cette notion, imaginez une fourmi se baladant le long d'une surface sans franchir un bord éventuel. Si celle-ci, en empruntant un certain chemin fermé (un circuit), se retrouve la tête en bas, alors la surface n'est pas orientable. Si au contraire, quel que soit le circuit emprunté, elle se retrouve toujours la tête à l'endroit, la surface est orientable. Ainsi, l'orientabilité d'une surface permet de définir deux « côtés » distincts d'une surface.

L'exemple classique et le plus simple pour illustrer la différence entre une surface orientable et une surface non-orientable est la comparaison entre le ruban classique et le ruban de Möbius. Pour le premier, on peut clairement identifier deux « faces », alors que la torsion du second est telle que ladite face soit unique.

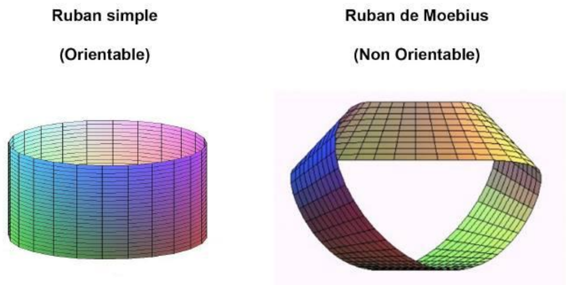

Figure 2

Théorème de classification

Maintenant que vous avez une idée intuitive de la manière dont la topologie considère les « formes », nous allons aborder un résultat phare de la topologie : le Théorème de classification des surfaces fermées. Nous générons trois surfaces (la sphère, le tore et le plan projectif) grâce au mécanisme du « quotient d'un carré » (quotienter un carré consiste à coller les côtés 2 à 2 dans un sens bien défini). À partir de ces trois surfaces, on peut obtenir toutes les surfaces fermées par l'opération de « somme connexe » qui consiste (intuitivement) à coller de telles surfaces ensemble. Plus précisément, la somme connexe de deux surfaces se fait en enlevant un disque de chacune d'elles et en les recollant suivant les bords de ceux-ci. L'illustration suivante montre les trois surfaces ainsi que la bouteille de Klein, générée par somme connexe de deux plans projectifs. En effet, le plan projectif est par définition la surface obtenue en collant un disque sur un ruban de Möbius. Le bord de ceux-ci est un cercle: on peut donc les faire coïncider. En utilisant maintenant la somme connexe, on enlève lesdits disques et cela revient à coller deux rubans de Möbius ensemble, comme le montre la Figure 4.

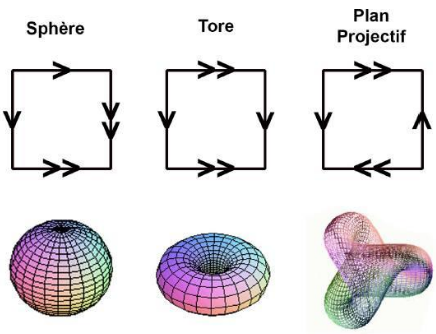

Figure 3

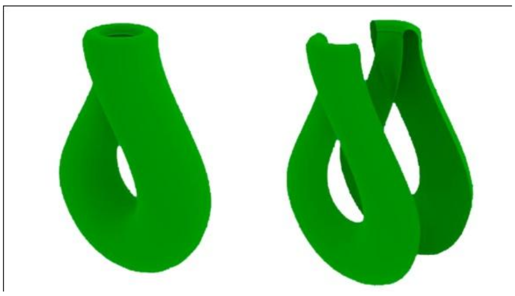

Figure 4

Caractéristique d'Euler

Un autre outil intéressant de classification est la caractéristique d'Euler, souvent connue pour le cas particulier des polyèdres convexes sans trou, selon laquelle :

$$s - a + f = 2$$

(où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces).

Cette caractéristique se généralise à d'autres objets mathématiques et traite avant tout des graphes (ensembles de points et d'arêtes les reliant), lesquels peuvent être représentés sur différentes surfaces. Nous allons considérer la caractéristique d'Euler appliquée aux graphes en utilisant la « triangulation » (graphe qui décompose une surface en triangles) sur les surfaces orientables compactes et sans bord ; elle est donnée par :

$$\chi = 2 - 2g$$

(où χ est la caractéristique d'Euler et g le nombre de « trous » dans la surface : $g = 0$ pour une sphère, $g = 1$ pour un tore,…)

Nous approfondirons bien sûr la notion de triangulation, qui est intuitivement un recouvrement par des faces triangulaires de notre surface, que nous généraliserons ensuite aux pavages (même principe qu'une triangulation, mais avec des polygones).

Nous conclurons avec un aspect plus ludique que mathématique de la topologie, en rapport étroit avec la caractéristique d'Euler cependant. Nous allons imaginer et montrer les différents pavages sur diverses surfaces topologiques.

Sources des images:

Figure 1 : https://fr.wikipedia.org/wiki/Sphère (sphère), 2014-03-09

https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore (tore), 2014-03-09

Figure 2 : http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6e/Cylindre_ell.png (ruban classique), 2014-03-09

http://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml (ruban de Möbius), 2014-03-09

Figure 3 : http://www.capes-de-maths.com/index.php?page=maple_chap03 (sphère), 2014-03-09

http://www.futura-sciences.com/[...]revelations-perelman-9975/ (plan projectif), 2014-03-09

http://prof.richard.free.fr/ (tore), 2014-03-09

https://fr.wikipedia.org/wiki/Bouteille_de_Klein (bouteille de Klein), 2014-03-09

Figure 4 : X. Mauquoy, D. Timmermans, P. Tranchida et M. Tsishyn.