



**Des bulles, des flocons et des maths**

Département de mathématiques

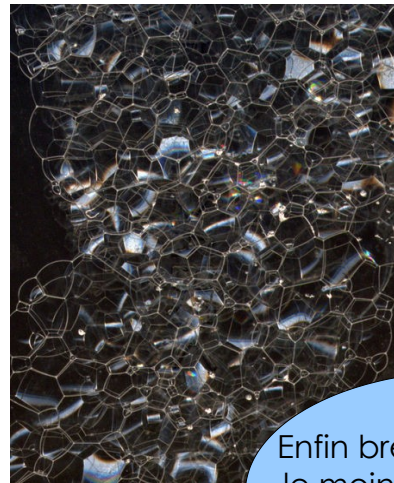
Vincent Dauchot, Robin Carton, Thibaut Kemajou, Eileen Robinson et Anna Vanden Wyngaerd

**Problème de Kelvin**

Quelle est la cellule permettant de remplir tout l'espace tridimensionnel, ayant une surface minimale pour un volume donné ?

Les bulles de savon ont la propriété intéressante de chercher à maximiser leur rapport volume / surface.

Etudier les amas de bulles permettrait-il de résoudre le problème de Kelvin ?

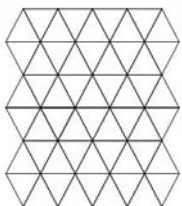


Enfin bref, on veut utiliser le moins de cire et avoir le plus de miel !

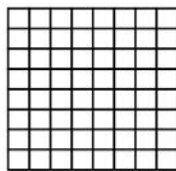
**Passage en 2D: théorème du nid d'abeilles**

Théorème (Thomas Hales, 1999): parmi tous les figures permettant de paver le plan, l'hexagone est le plus économique, c'est à dire celui qui minimise son périmètre pour une surface donnée.

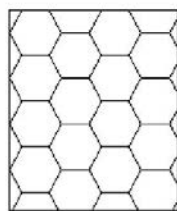
Trois solutions possibles dans  $\mathbb{R}^2$  :



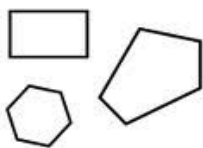
pavage triangulaire



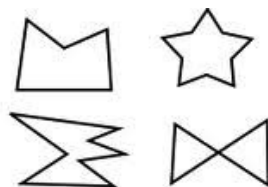
pavage carré



pavage hexagonal



Convex Polygons



Non-convex Polygons

*Historique*

- Pythagoriciens (5e siècle avant J.C.): il n'existe que 3 polygones réguliers qui peuvent paver le plan (triangle, carré et hexagone)
- Pappus D'Alexendrie (vers 300 après J.C) : remarque dans son livre que parmi les trois pavages réguliers, celui de l'hexagone est le plus efficace
- L. Fejes Toth (1943) : prouve la conjecture du nid d'abeilles dans le cas convexe.



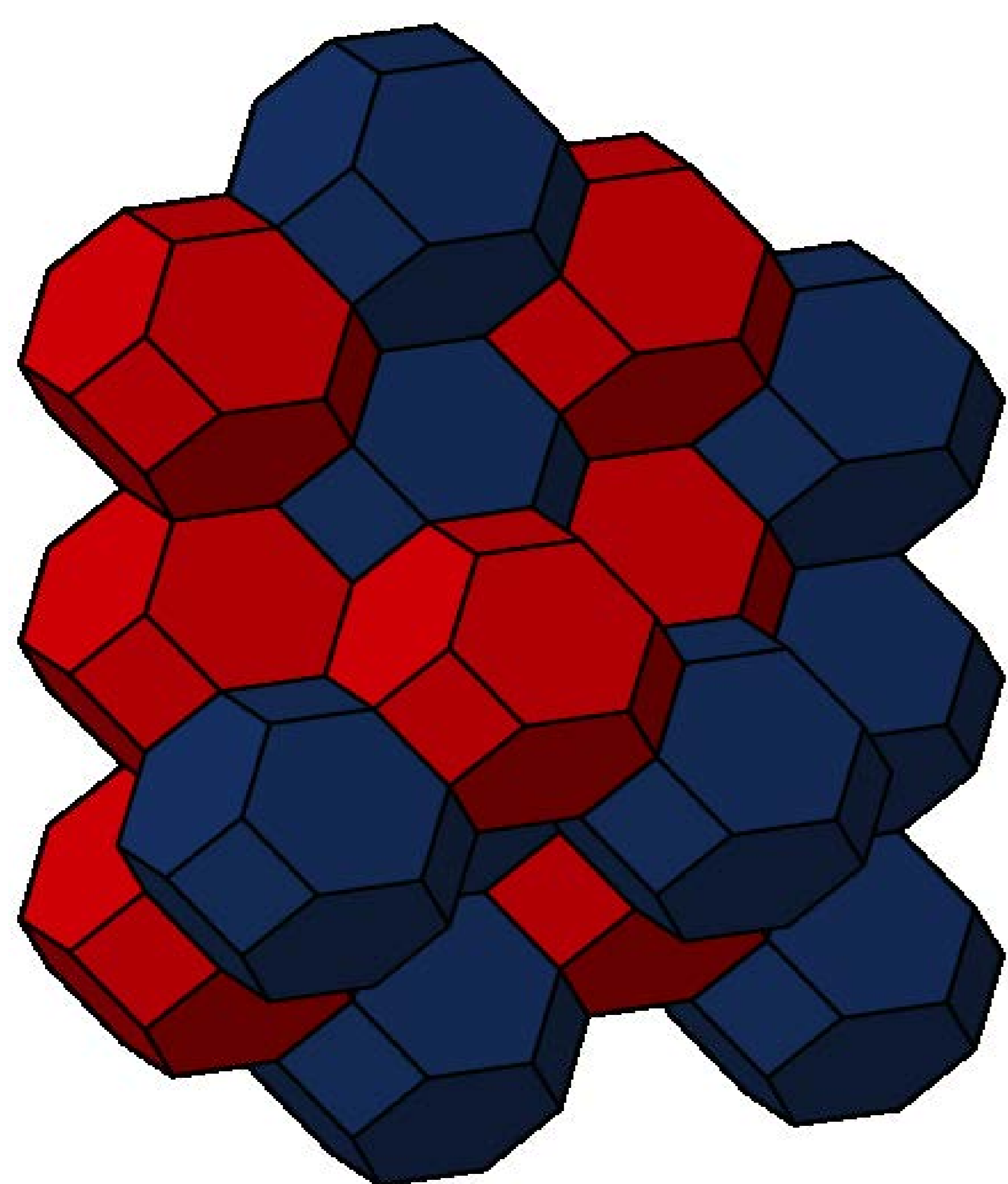
**Des bulles, des flocons et des maths**

Département de mathématique

Robin CARTON, Vincent DAUCHOT, Thibaut KEMAJOU, Eileen ROBINSON et Anna VANDEN WYNGAERD

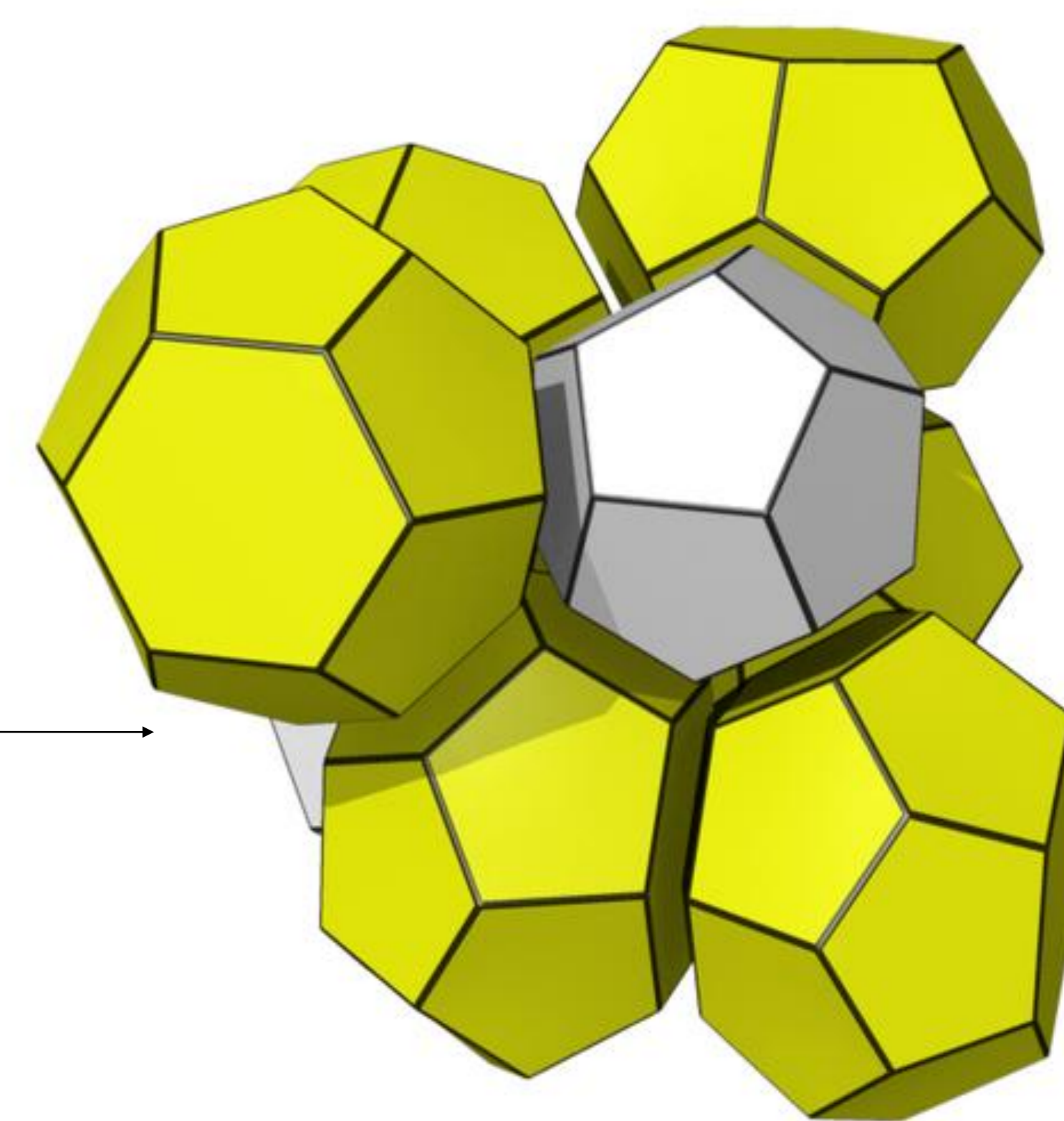
Retour en 3D

Ici, rien de prouvé!



Jusqu'en 1994, l'octaèdre tronqué proposé par Kelvin était le meilleur candidat.

En 1994, coup de théâtre : Phelan et Weaire proposent une structure complexe plus économique.



Mais ça n'est pas fini !  
Pourrez-vous trouver le candidat suivant ?

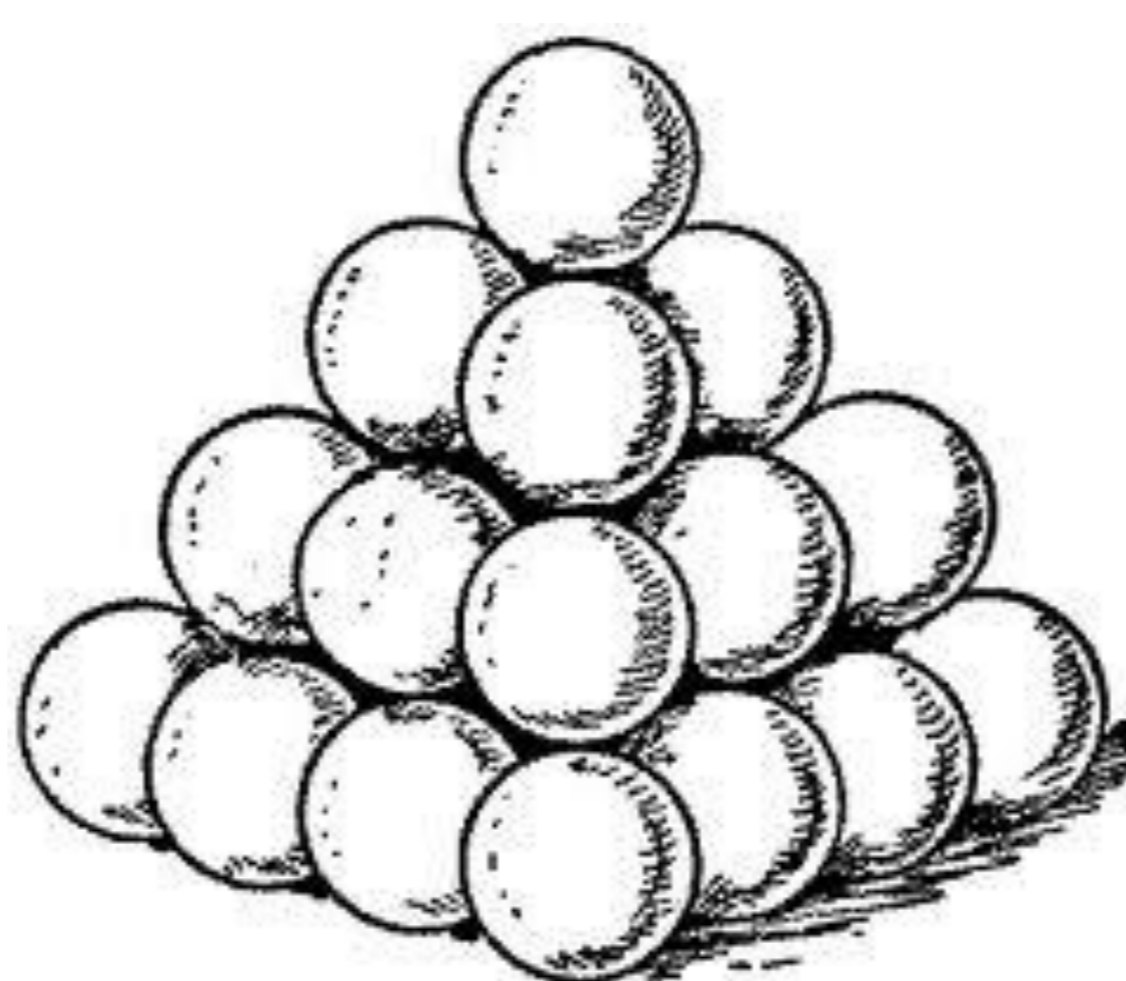
**Enigme similaire: problème de Kepler**

Quelle est la façon la plus dense d'empiler des sphères de taille identique? C'est à dire, en laissant le moins d'espace vide entre elles.

Avec une densité de +/- 74 %, l'empilement cubique à face centré doit être le meilleur !



Johannes Kepler en 1611



Empilement cubique à face centrée

Malgré une intuition claire, la conjecture de Kepler est restée sans démonstration pendant 4 siècles. En 1998 Thomas Hales construit une preuve par ordinateur.



Des bulles, des flocons et des maths

Département de Mathématique

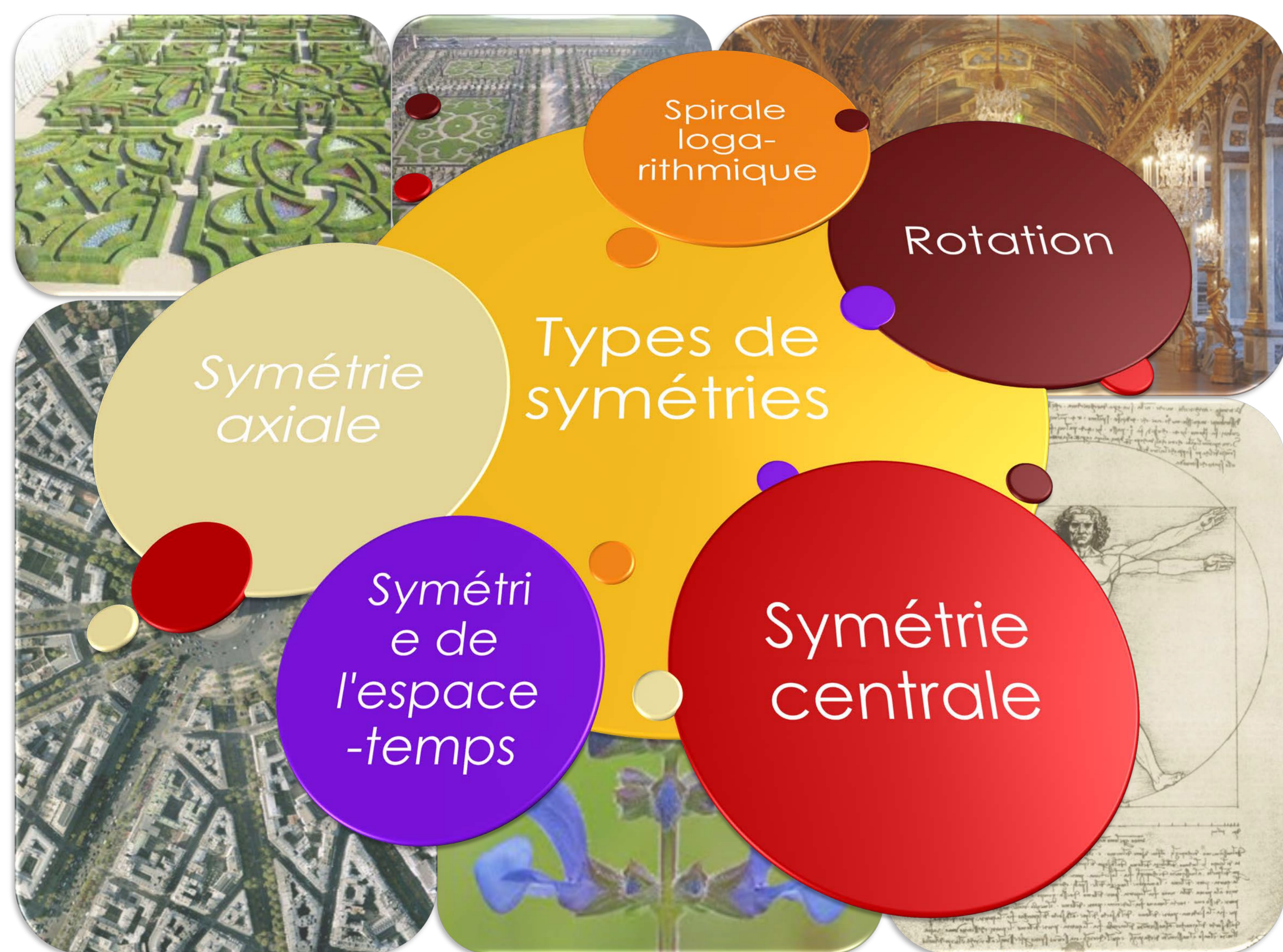
Robin CARTON, Vincent DAUCHOT, Thibaut KMEAJOU, Eileen ROBINSON, Anna VANDEN WYNGAERD

Symétries classiques

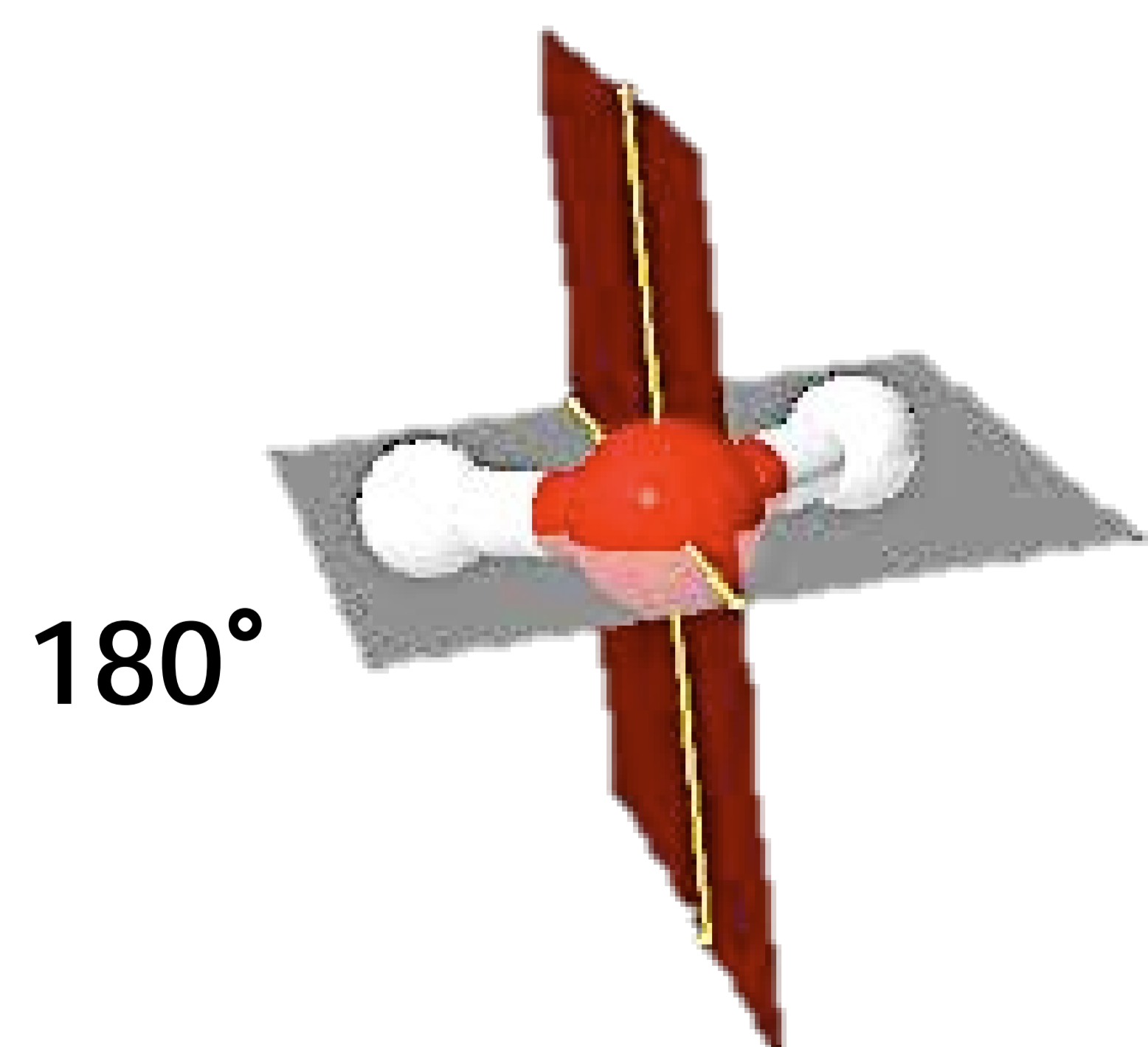
Qu'est-ce qu'une symétrie?

« Correspondance de position de deux ou de plusieurs éléments par rapport à un point ou à un plan. » (Larousse)

Types de symétries



La molécule d'eau



Identité

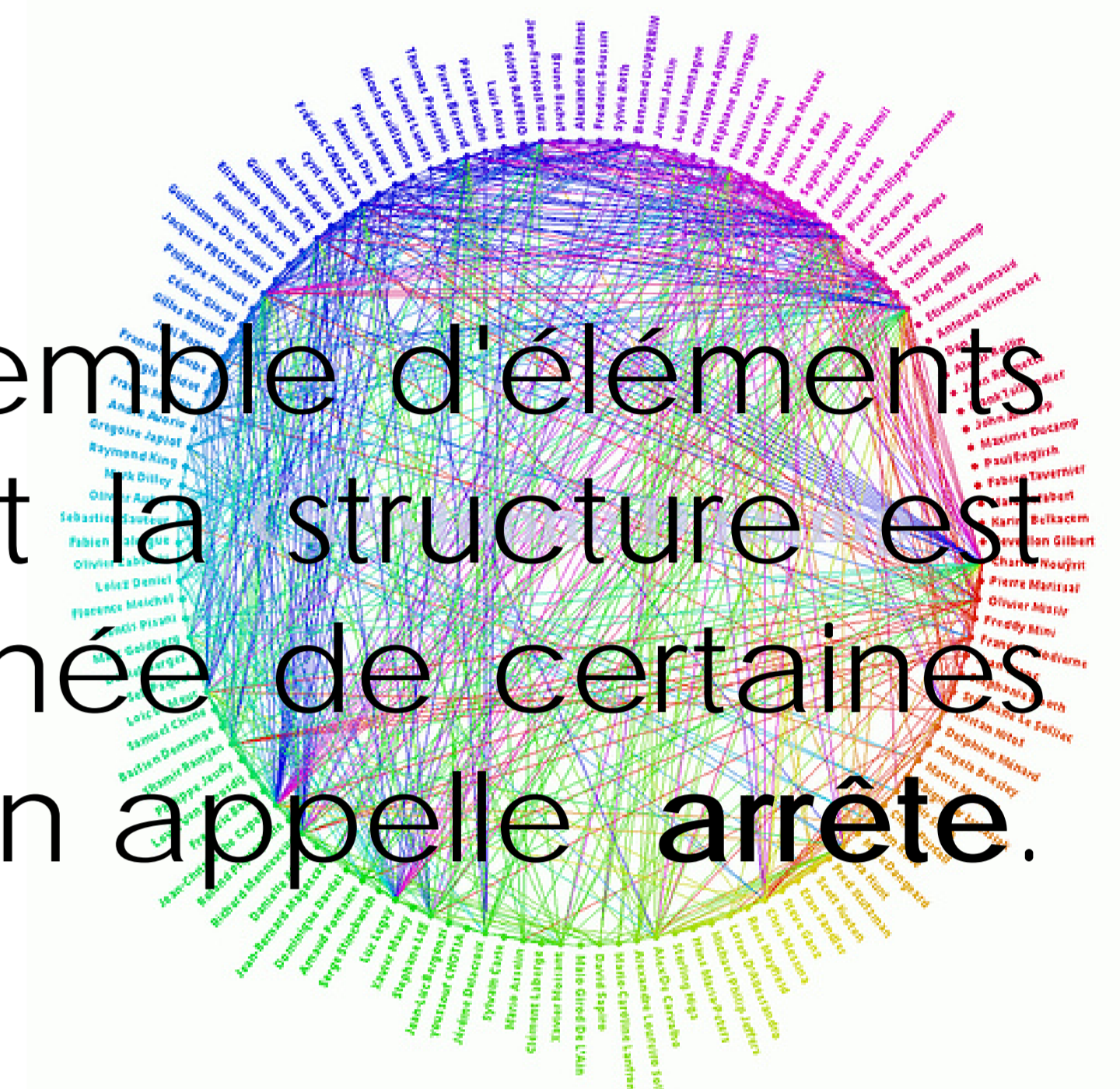
Rotation de

Deux réflexions

Graphes et groupes de symétrie

Petites définitions...

« Un **graphe** est un ensemble d'éléments appelés **sommets**, dont la structure est déterminée par la donnée de certaines paires de sommets qu'on appelle **arrête**. »



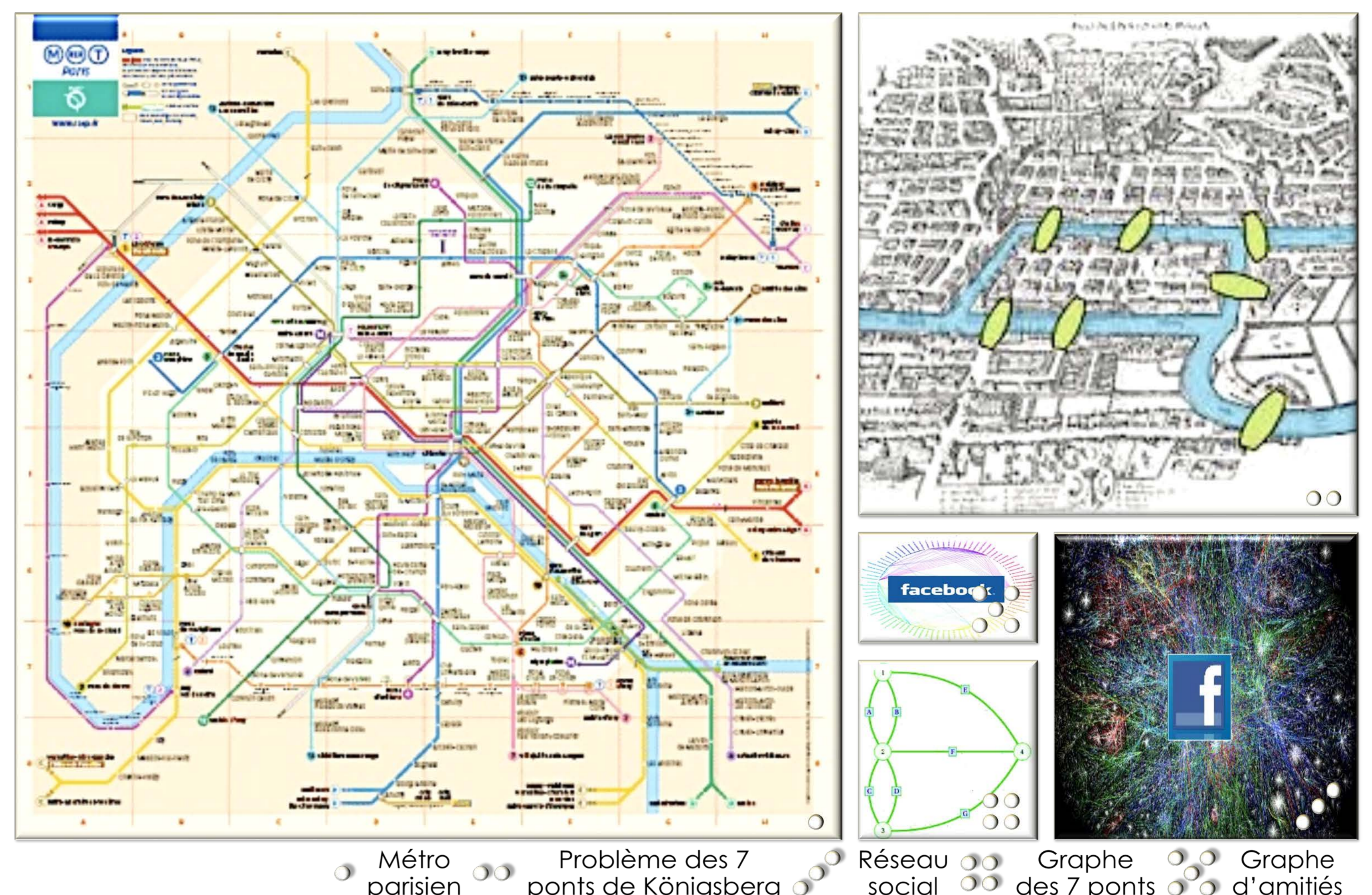
« Formule magique »

Symétrie au sens large est un synonyme d'automorphisme.

« Formule Magique » calculant le nombre d'automorphismes d'un graphe:

$$|G| = |G_p| \cdot |G(p)|$$

Applications



Métro parisien    Problème des 7 ponts de Königsberg    Réseau social    Graphe des 7 ponts    Graphe d'amitiés

Sources d'images:

Jardin 1 : <http://andrelenotre.com/2012/05/04/orangerie-jardins-de-versailles-vue-aerienne-du-bassin/>  
 Jardin 2 : <http://www.lecafedesmaths.blogspot.be/search/label/symetrie>  
 graphe-social/  
 Lumières : <http://www.voyage-sejour-vacances.com/voyage/le-chateau-de-versailles/>  
 Routes : <http://remi.revues.org/3261>  
 Fleur : <http://gucolula.over-blog.com/article-symetrie-51674449.html>  
 problèmes-de-la-semaine-34-aout-2010/  
 Da Vinci : [http://www.ccrtravail.org/v2/index.php?option=com\\_content&view=article&id=160&lang=fr](http://www.ccrtravail.org/v2/index.php?option=com_content&view=article&id=160&lang=fr)  
 © Toute reproduction, même partielle, doit indiquer clairement le nom de tous les auteurs, le nom du Service/Département, ainsi que la mention « Printemps des Sciences 2013 - Bruxelles »  
 Facebook est un graphe\_a31.html

Molécule d'eau : <http://jmol.sourceforge.net/screenshots/index.fr.html>  
 Facebook sans inscription : <http://www.internetactu.net/2007/09/28/comprendre-le->

Carte métro : <http://www.plandeparis.info/metro-de-paris/ratp-metro.html>  
 7 ponts dessin : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème\\_des\\_sept\\_ponts\\_de\\_Königsberg](http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_des_sept_ponts_de_Königsberg)  
 7 ponts graphe : <http://epik.scientifik.fr/2010/08/30/maths-correction-des->

Facebook blc : <http://www.decideo.fr/datavisual/Pourquoi-le-symbole-secret-de->



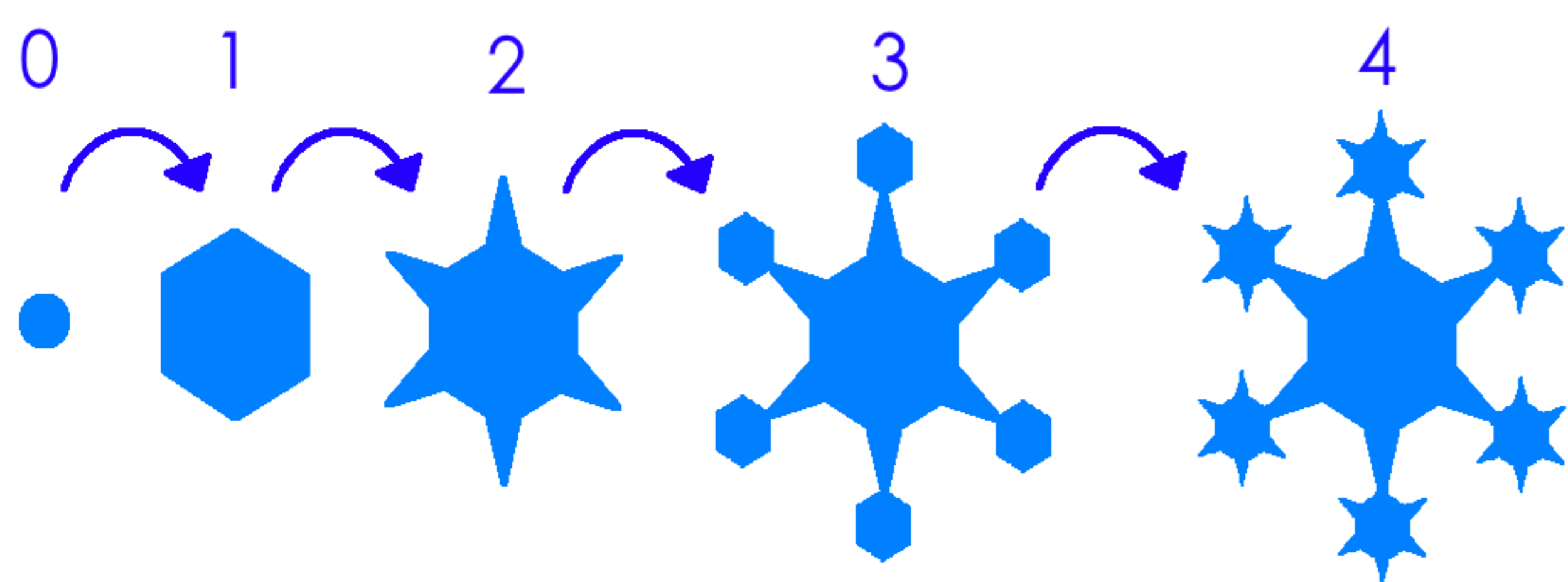
**Des bulles, des flocons et des maths**

Département de Mathématique

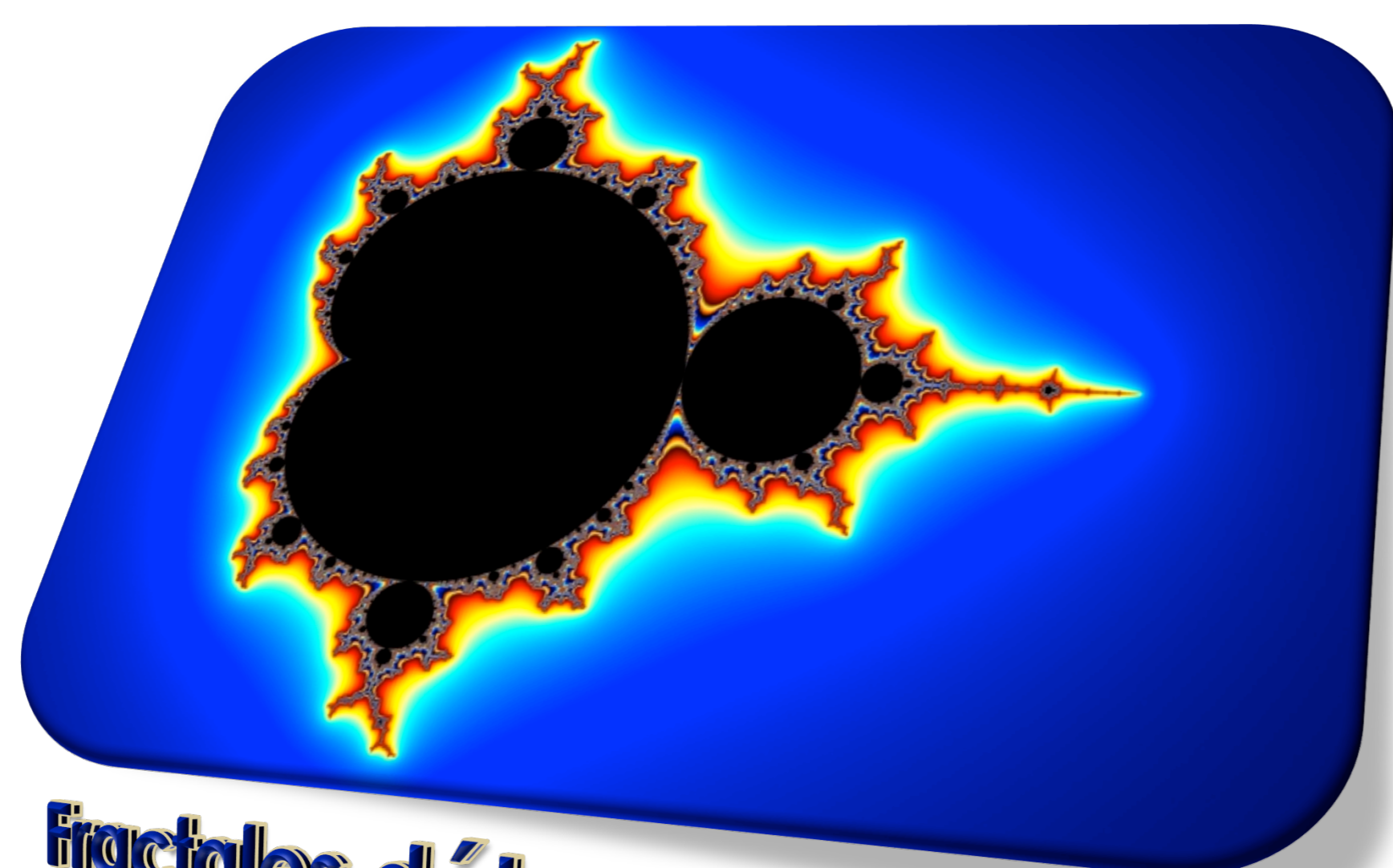
Robin CARTON, Vincent DAUCHOT, Thibaut KMEAJOU, Eileen ROBINSON, Anna VANDEN WYNGAERD

**Flocons naturels**

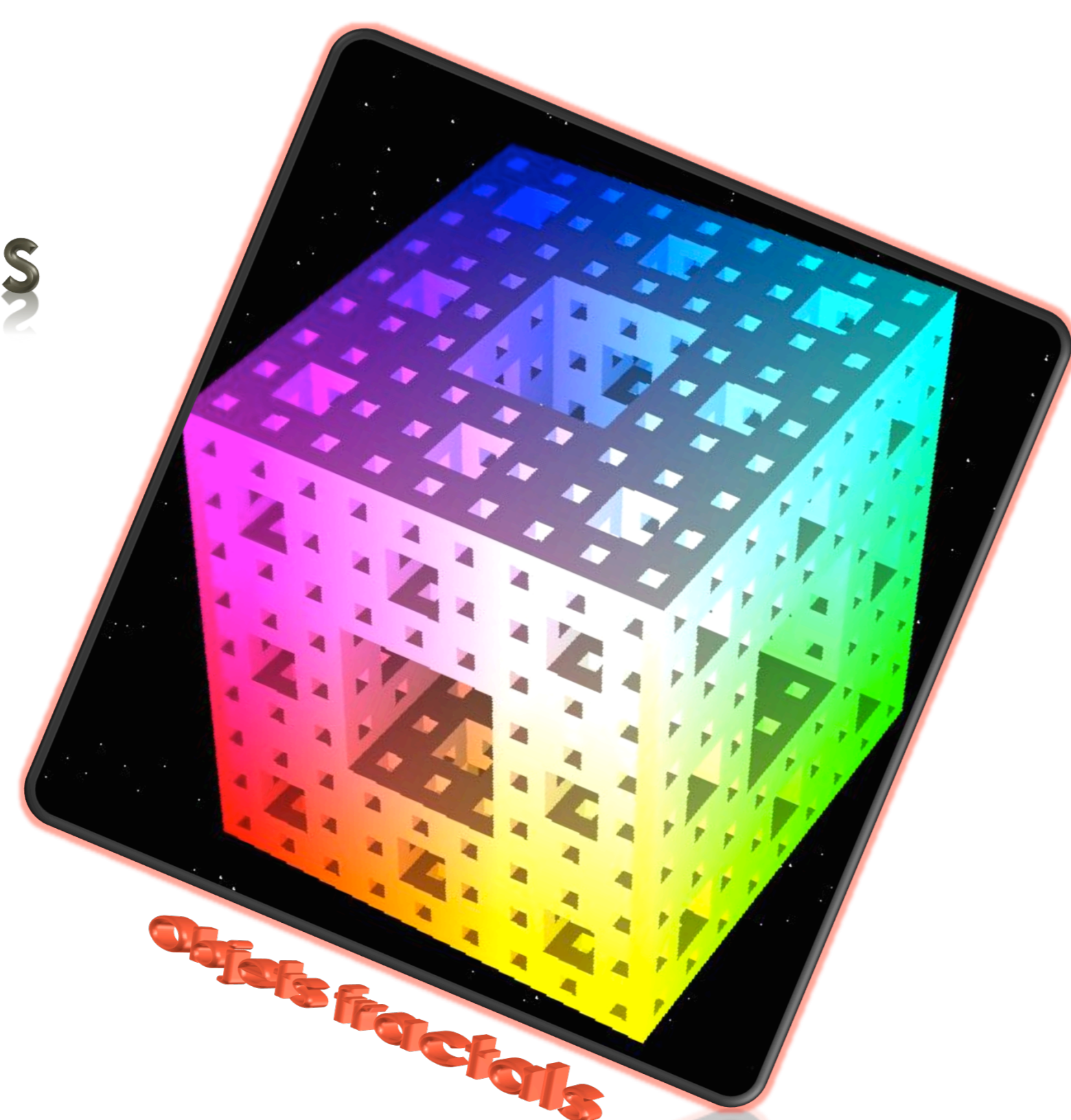
*Formation des flocons*



*Types de fractale*



Fractales naturelles



**Flocon de Koch**

*Naissance de la courbe de Koch*

En 1904, **Helge von Koch** (1870-1924), mathématicien suédois, écrit « **Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire** ».



*Construction*



*Dimension fractale*

« La dimension d'Hausdorff se situe au moment où l'on passe d'une dimension donnant une mesure de valeurs infinies à celle qui donne une valeur nulle. Cette rupture correspond exactement à la dimension fractale cherchée de l'ensemble. »

La **dimension du flocon de Koch** est :

$$\log(4)/\log(3) \approx 1,26$$

Sources d'images:

Fractale naturelle : [http://1.bp.blogspot.com/-4k3GNf\\_wOw/TxOSyalk84/AAAAAAAAAEw8/Lm3gen9eiTc/s1600/brocol2.jpg](http://1.bp.blogspot.com/-4k3GNf_wOw/TxOSyalk84/AAAAAAAAAEw8/Lm3gen9eiTc/s1600/brocol2.jpg)  
Ensemble de Mandelbrot : [http://www.fractalposter.com/images/mandelbrot\\_set\\_02\\_969\\_720\\_480.jpg](http://www.fractalposter.com/images/mandelbrot_set_02_969_720_480.jpg)  
Objet Fractal : <http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/menger.jpg>  
koch\_snowflake\_rgb-cmy.jpg

Pavage de Koch : <http://www.mathcurve.com/fractals/koch/koch.htm>  
Construction de la courbe : [http://abyss.uoregon.edu/~js/images/koch\\_curve.gif](http://abyss.uoregon.edu/~js/images/koch_curve.gif)  
Flocon coloré : <http://nirare.files.wordpress.com/2011/02/>

Croissance d'un flocon : d'après <http://www.intra-science.com/physique/categorie-phys/36-physique-fondamentale/293-flocon-de-neige-formation>  
© Toute reproduction, même partielle, doit indiquer clairement le nom de tous les auteurs, le nom du Service/Département, ainsi que la mention « Printemps des Sciences 2013 - Bruxelles »