

## Aux tréfonds du chaos

BADALYAN Mariam, POSTIAU Nicolas, SCHMIDT Vincent

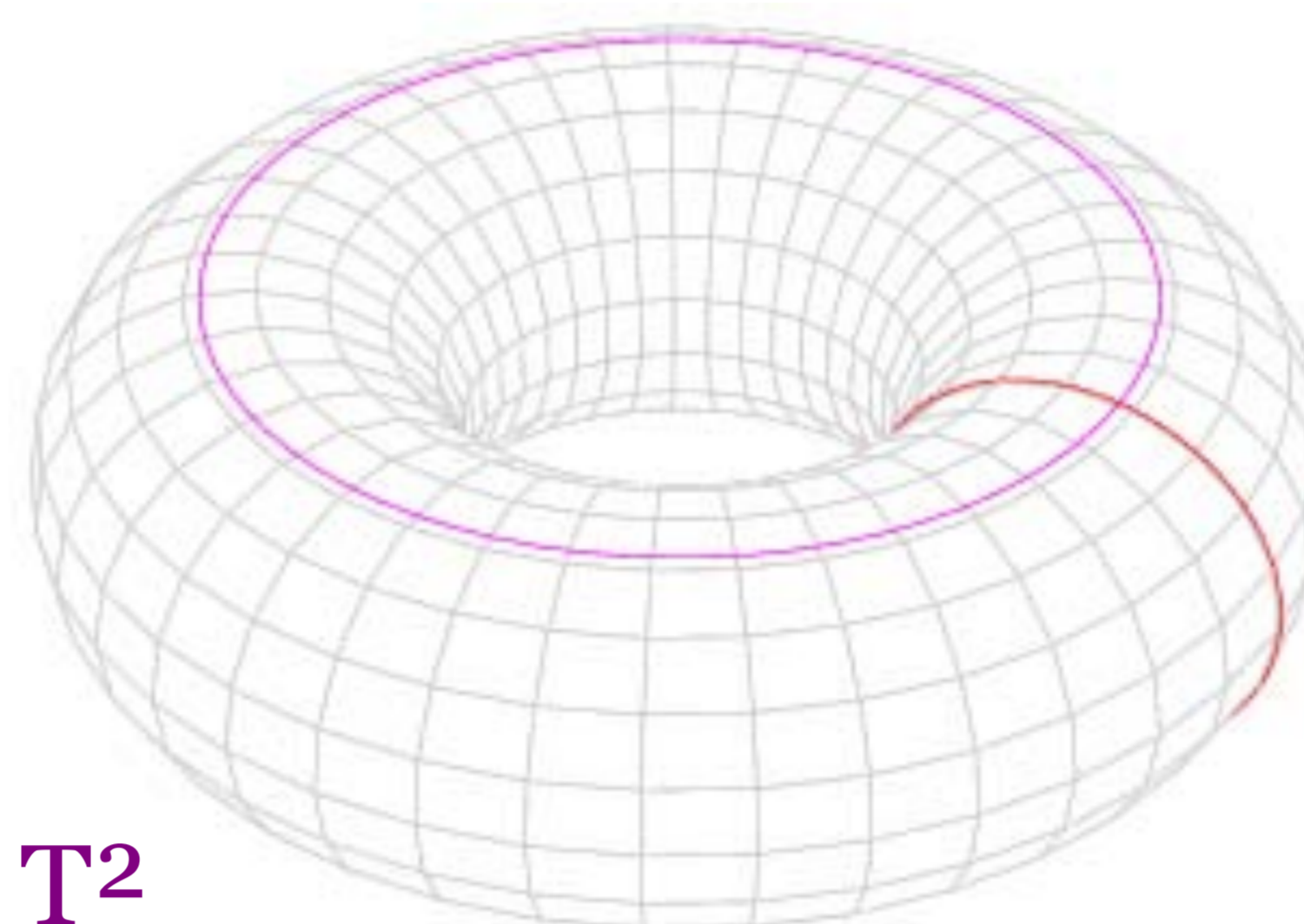
Département de Physique

### Pendule double



Le mouvement du pendule harmonique est l'un des mieux décrits et compris en physique classique.

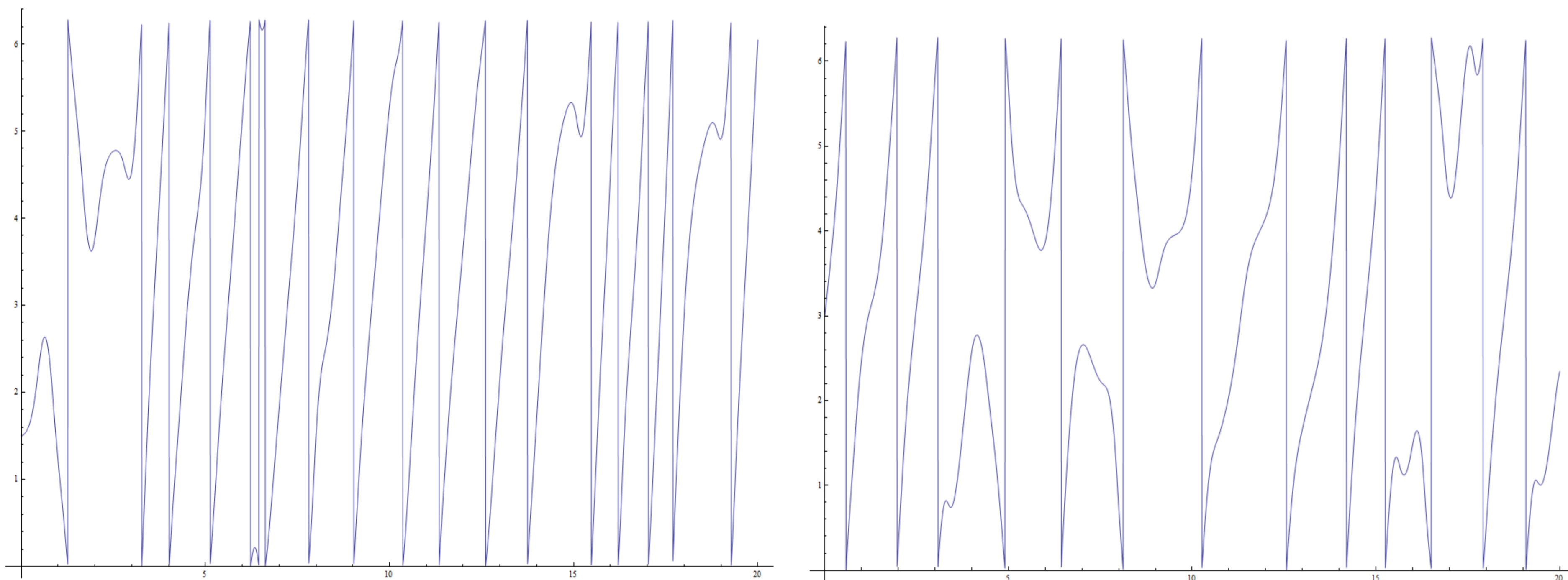
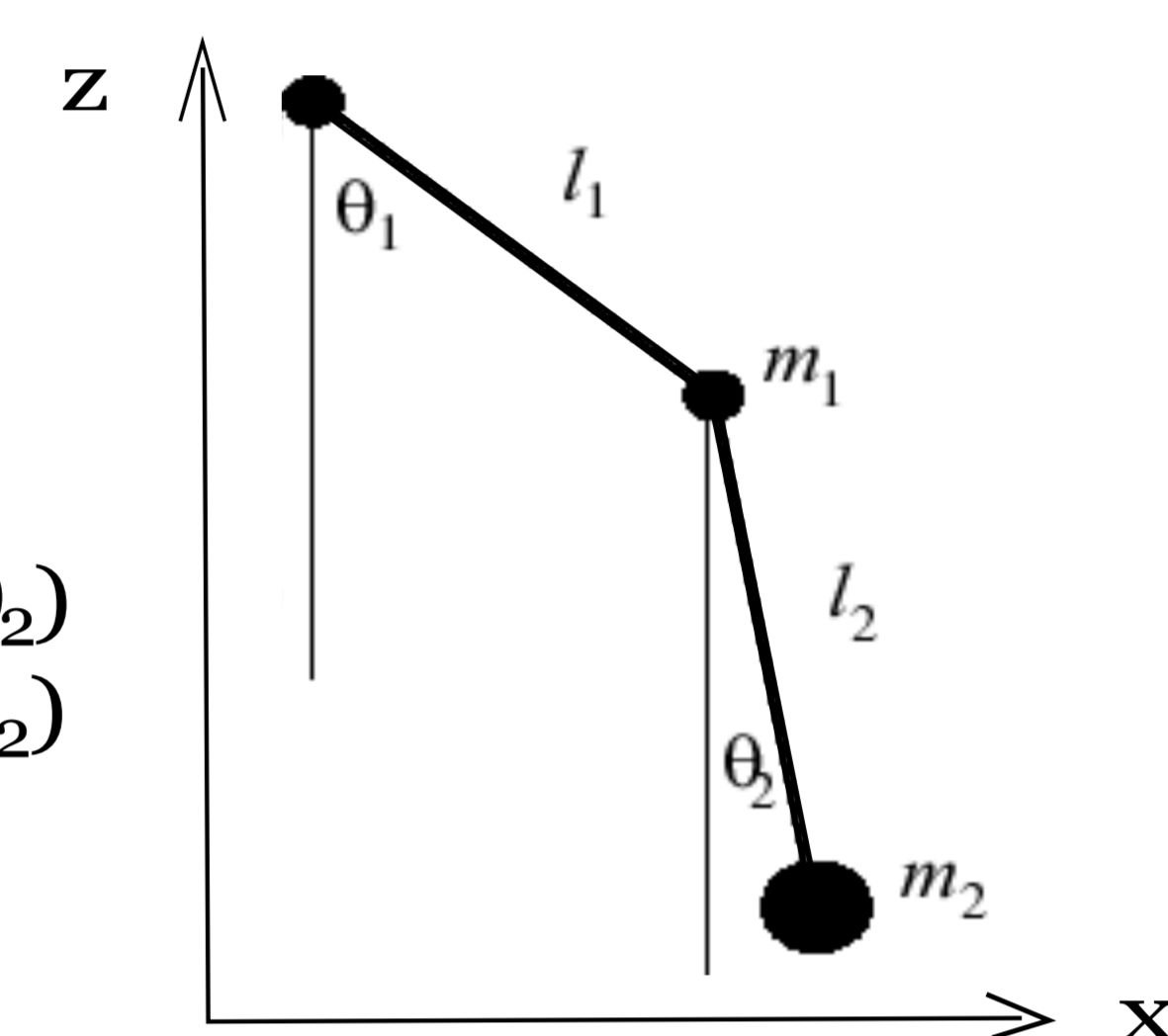
Il suffit pourtant de lui attacher un deuxième pendule pour le rendre complètement chaotique.



$T^2$

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ z_1 = -l_1 \cdot \cos(\theta_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = l_1 \cdot \sin(\theta_1) + l_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ z_2 = -l_1 \cdot \cos(\theta_1) - l_2 \cdot \cos(\theta_2) \end{cases}$$

L'espace des configurations a la forme d'un tore  $T^2$  par la combinaison de deux mouvements harmoniques.



Deux pendules doubles identiques lâchés de positions proches aboutissent à des mouvements complètement différents. C'est la dépendance aux conditions initiales, commune à tout système chaotique.

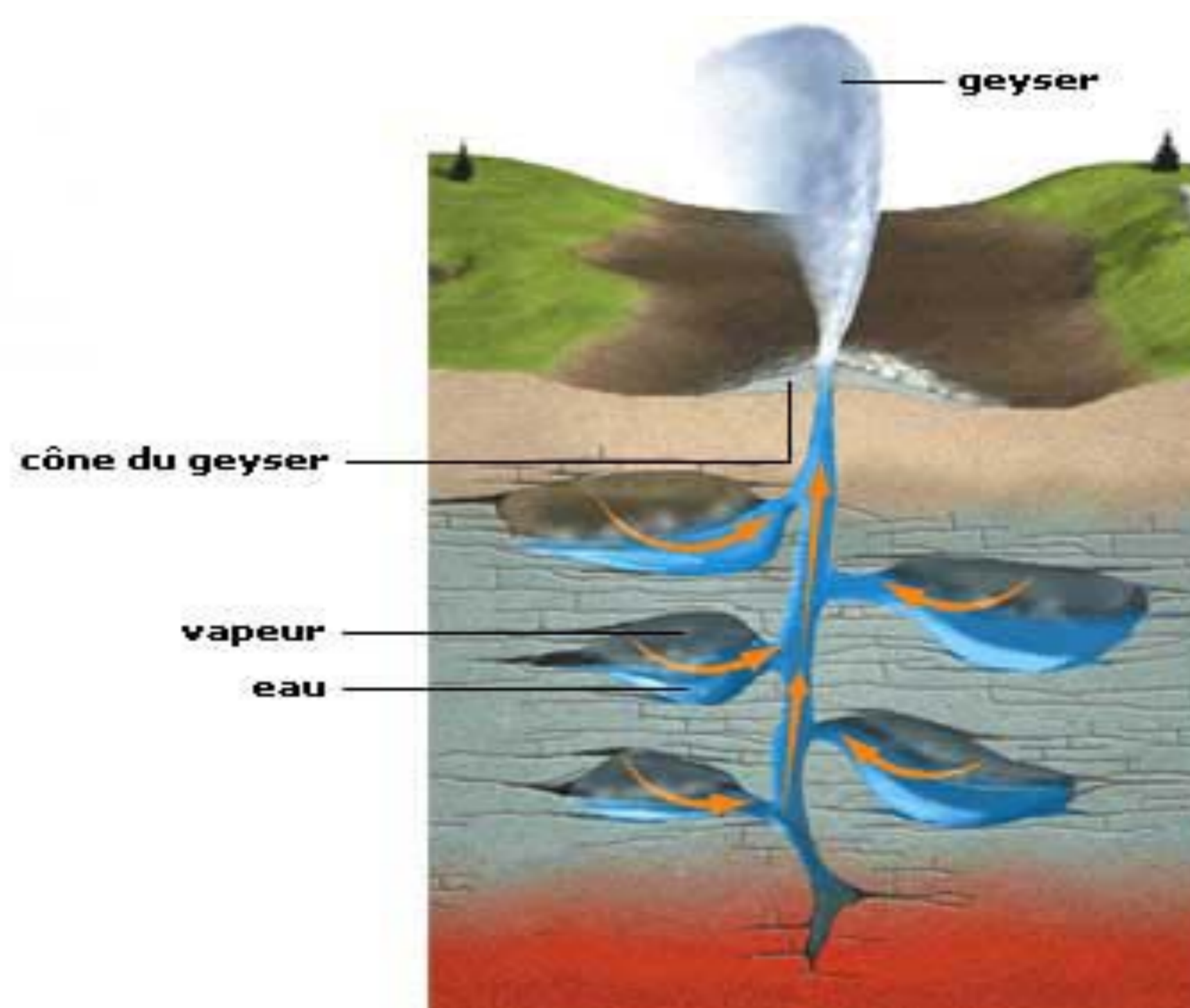
En exprimant l'amplitude des deux angles en fonction du temps, les solutions peuvent être déterminées par calcul numérique.

### Geysier

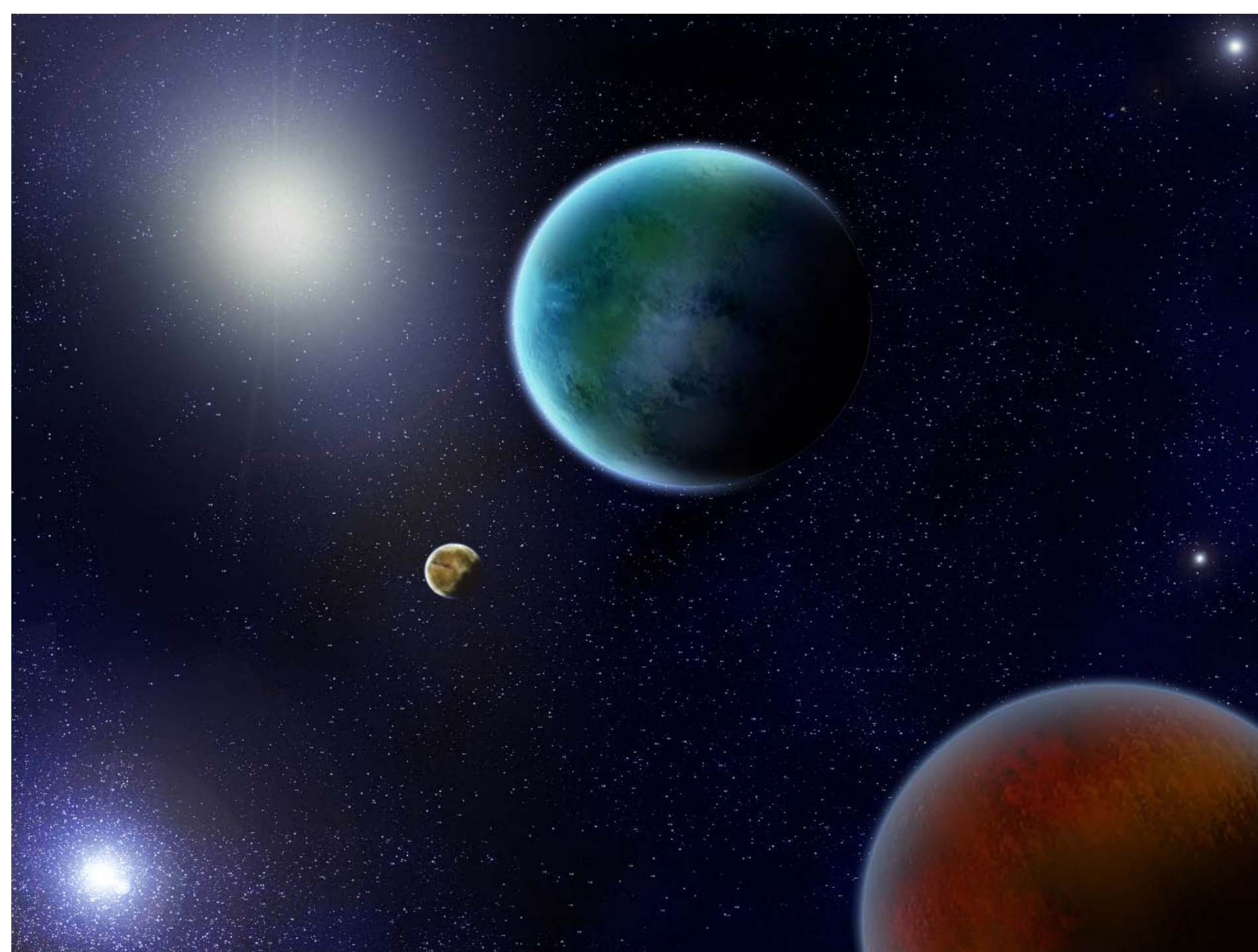
L'éruption survient lorsque l'eau contenue dans les cavités souterraines atteint sa température d'ébullition, et se dilate en se vaporisant. L'eau du conduit forme alors une "bulle", dont l'apparition est très difficile à prédire.

La dépendance aux conditions initiales ne peut pas y être mise en évidence comme pour le pendule double, vu le nombre important de paramètres du système.

On peut qualifier ce phénomène d'irrégulier.

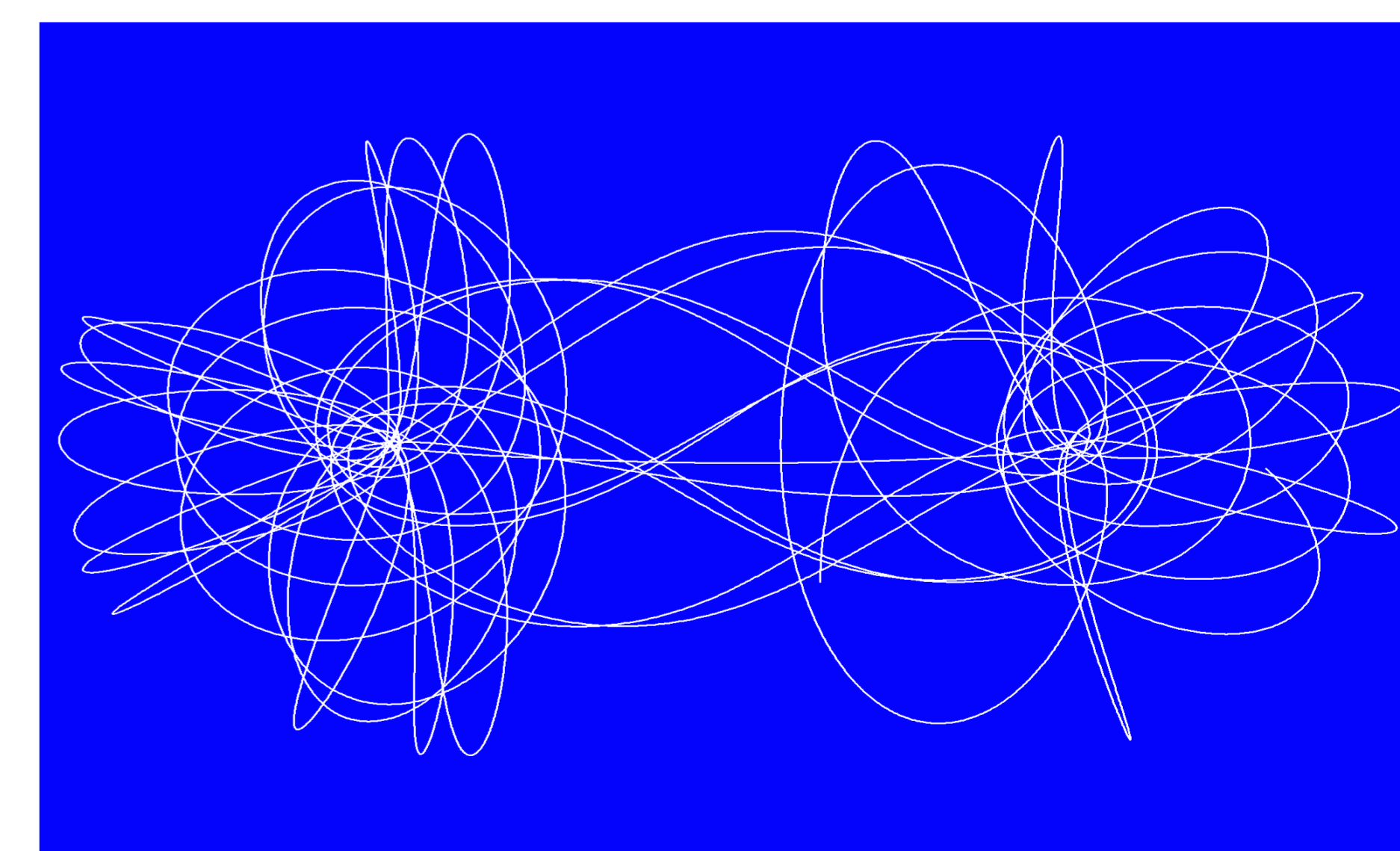


### Problème à trois corps



Déterminer le mouvement de trois corps célestes, par exemple des planètes, agissant l'un sur l'autre gravitationnellement est un problème physique peu compris à ce jour.

Il est certain cependant que ce mouvement est complètement chaotique et les équations le régissant, arbitrairement complexes.





## Aux tréfonds du chaos

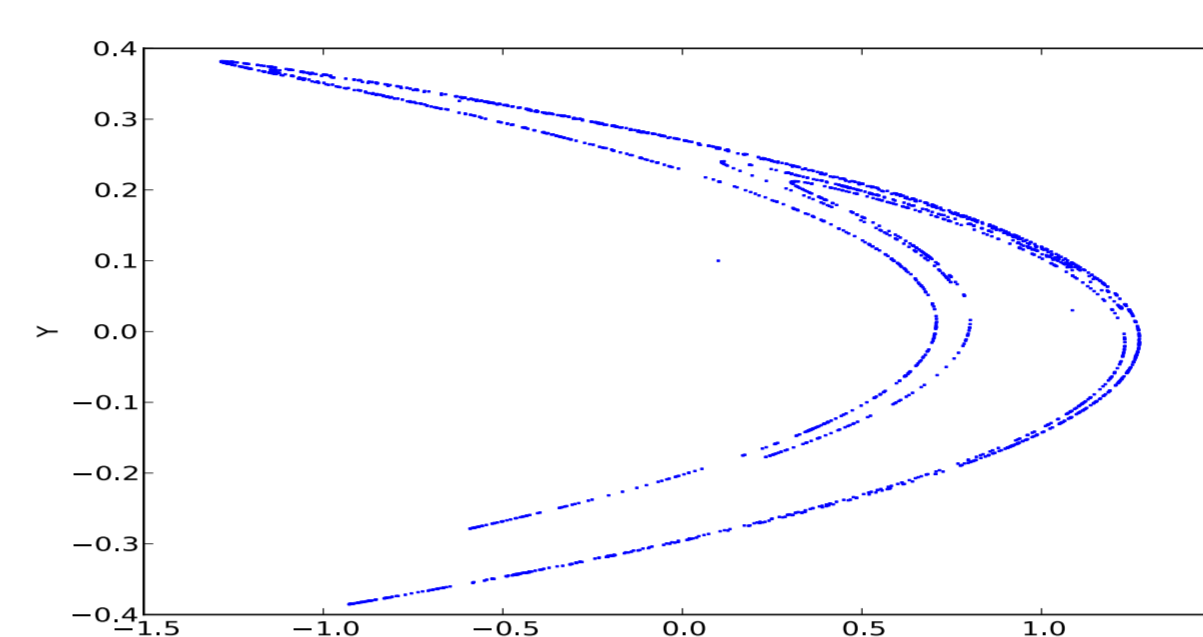
BADALYAN Mariam, POSTIAU Nicolas, SCHMIDT Vincent  
Département de Physique

### Des attracteurs très étranges...

Un **attracteur** est un ensemble ou un espace vers lequel un grand nombre de trajectoires évoluent. La caractérisation de l'attracteur est donc essentielle pour l'étude du système dynamique.

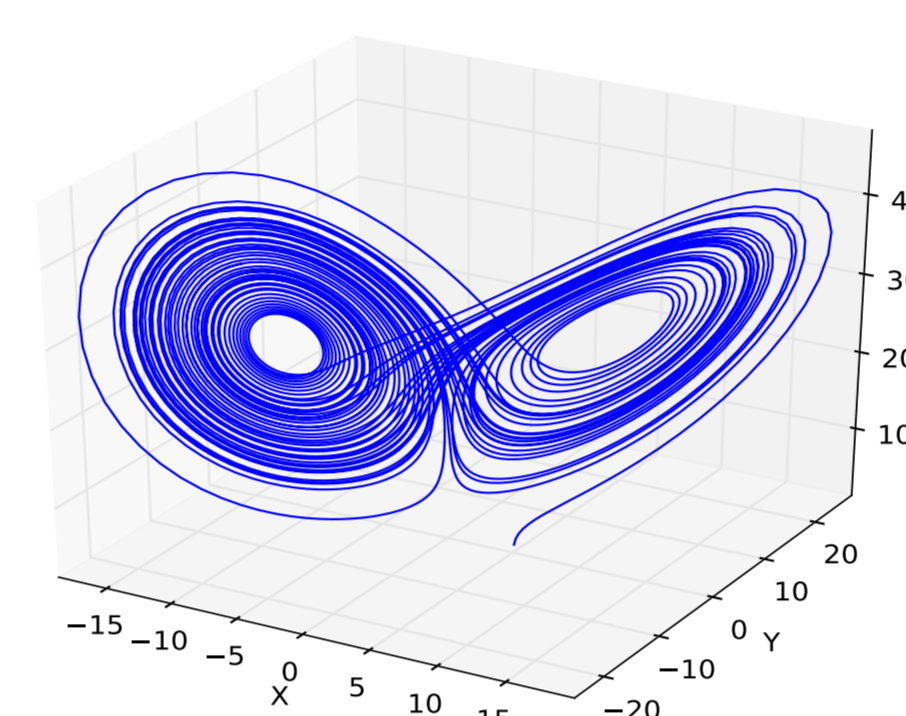
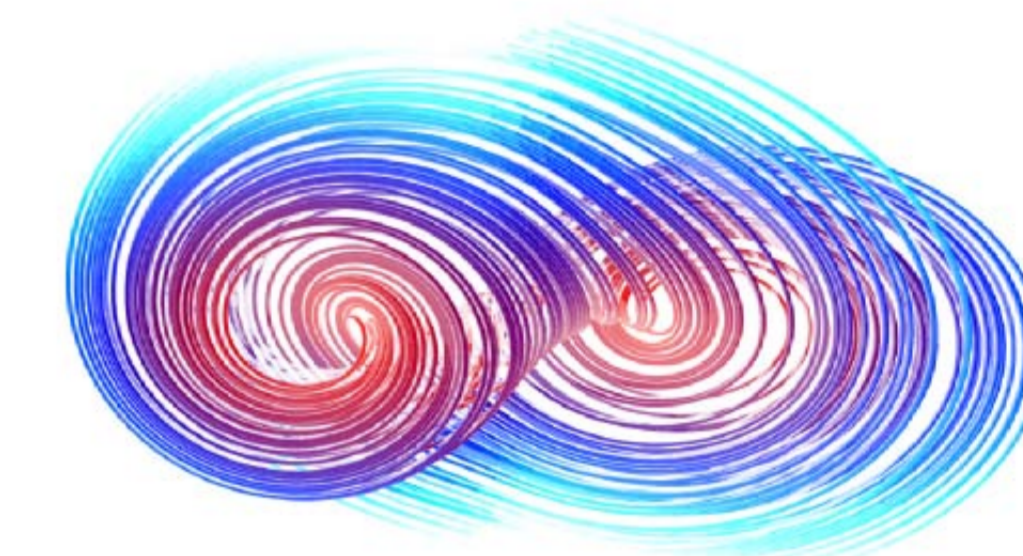
Un système dont la dynamique est chaotique peut donner lieu à un **attracteur étrange** possédant une dimension fractale (non entière).

L'évolution du système dépend alors fortement des conditions initiales et sa représentation est irrégulière, non périodique.



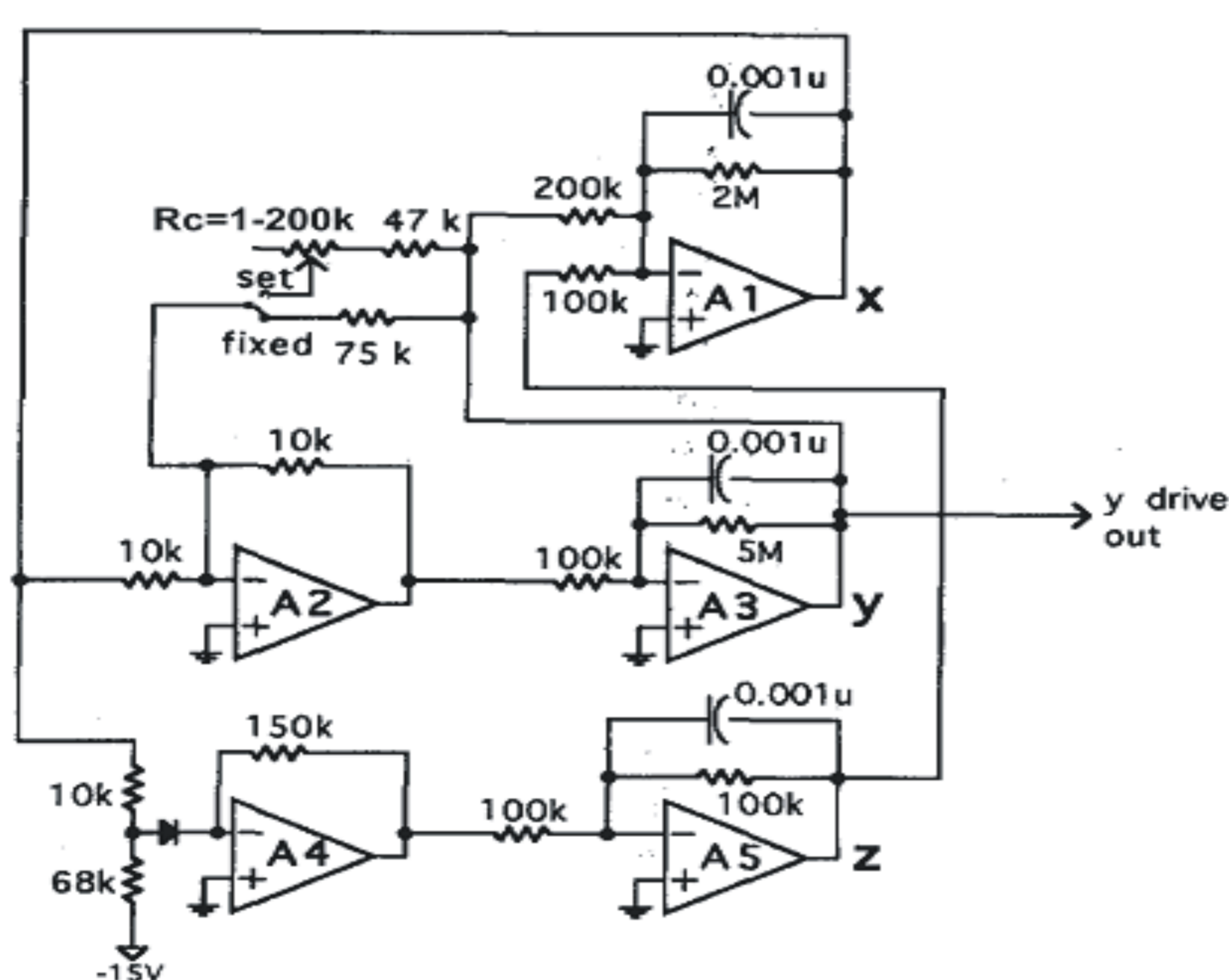
Attracteur de Hénon : orbites stellaires

Attracteur de Chua : circuits électroniques



Attracteur de Lorenz : évolution climatique et météorologie

## RÖSSLER



$$\begin{aligned} dx/dt &= -y - z \\ dy/dt &= x + ay \\ dz/dt &= b + z(x - c) \end{aligned}$$

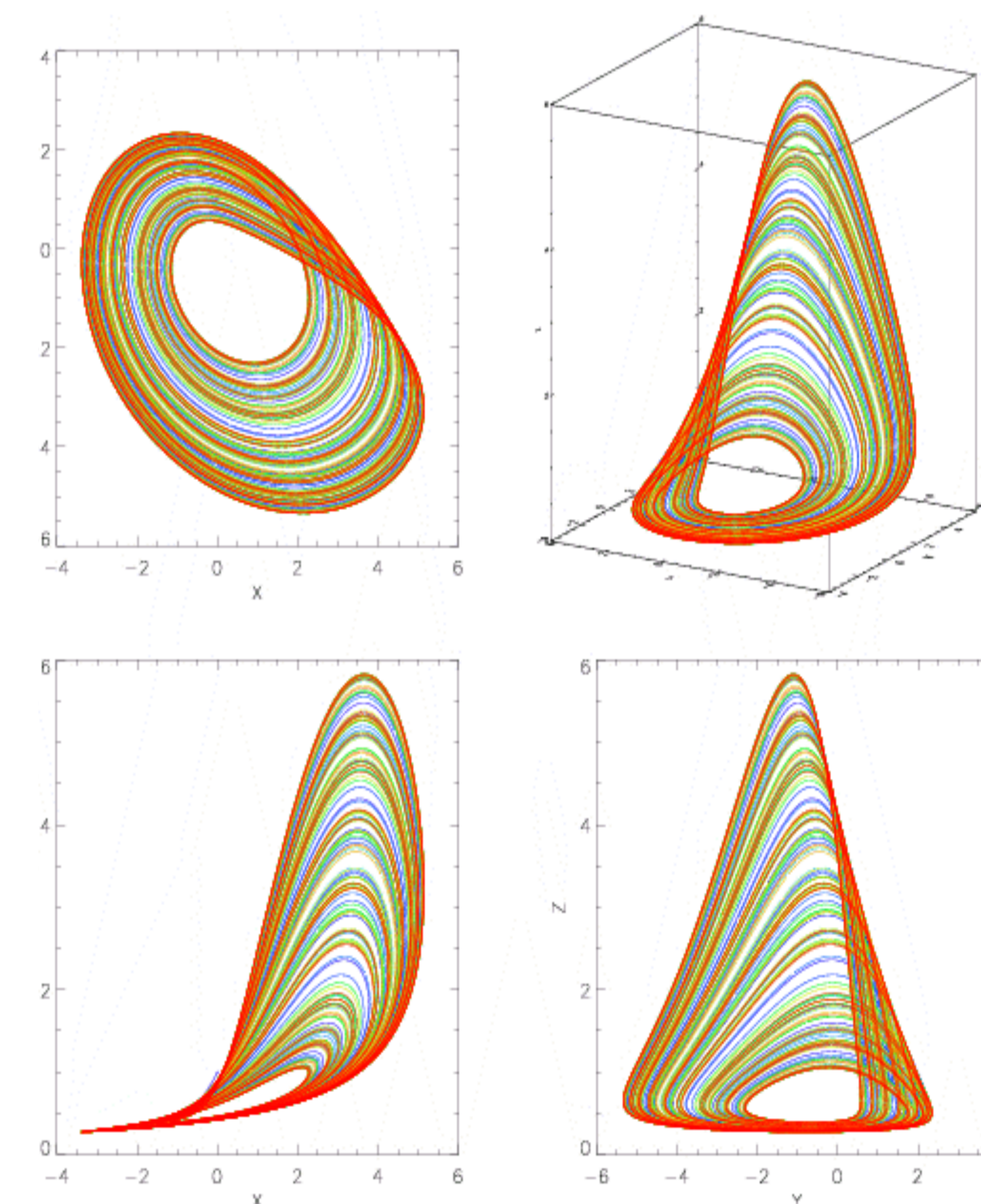
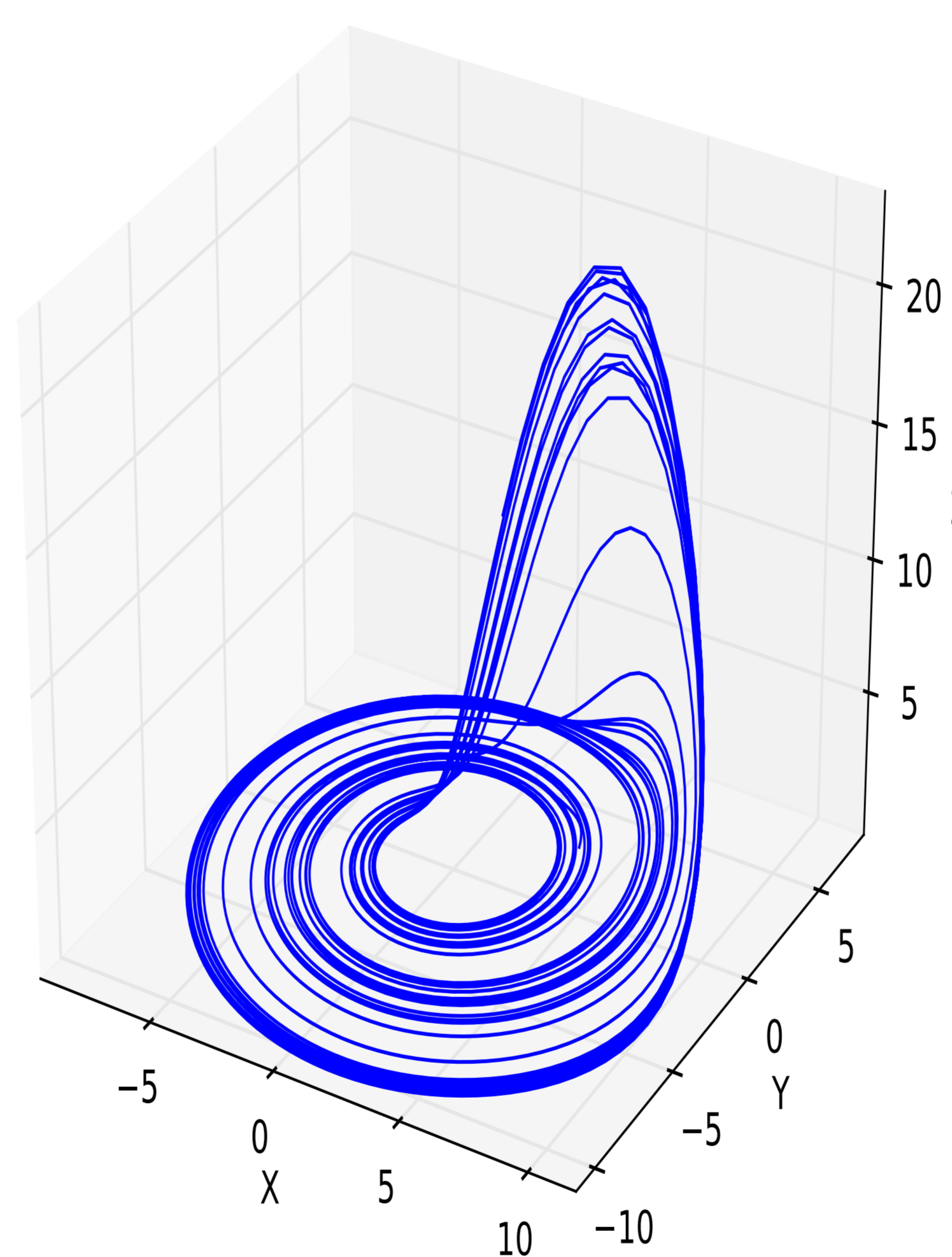
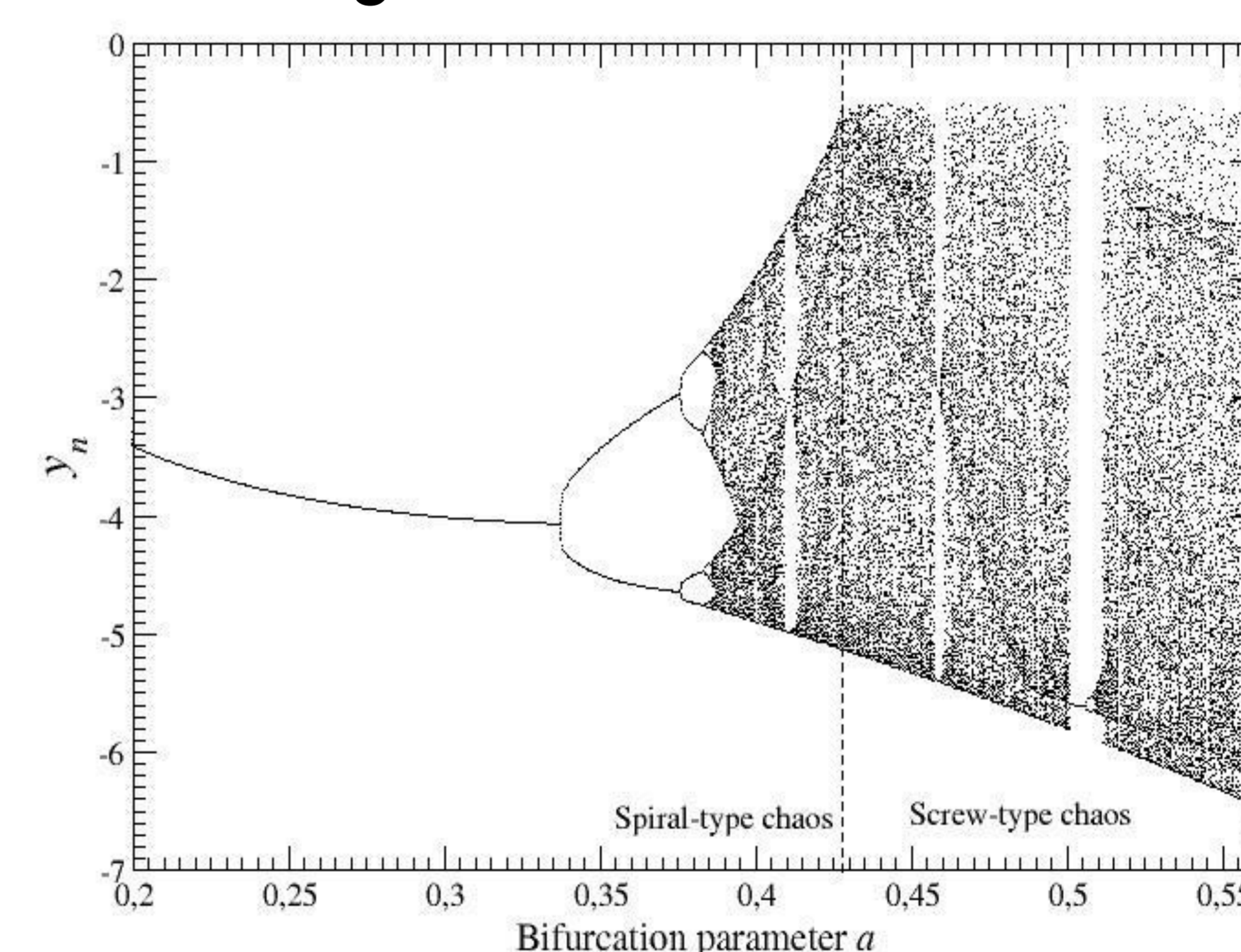
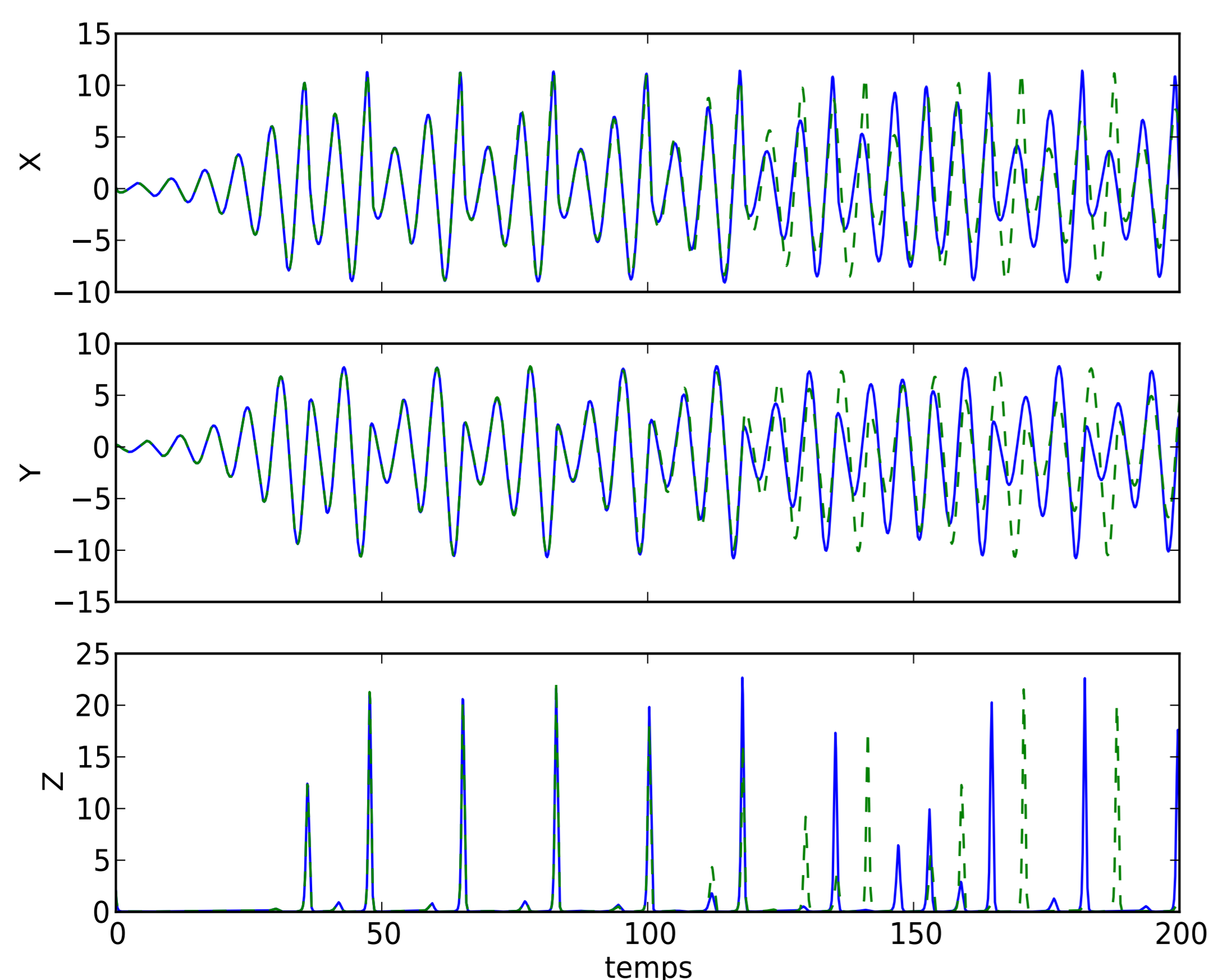


Diagramme de bifurcation



### Sensibilité aux conditions initiales



- Système dynamique non linéaire
- Non résoluble analytiquement ; la solution doit être déterminée numériquement ou expérimentalement
- La solution n'est chaotique que pour certaines valeurs des paramètres (a,b,c)