

LE CHAOS – LYAPUNOV CONTRE VENTS ET MARÉES

M. Badalyan, M. Bulnes Cuetara, Nguyen H.S., P. Schram
Département de Mathématique

La théorie du chaos consiste en l'étude de systèmes dynamiques dans lesquels d'infimes variations des conditions initiales ont une influence cataclysmique. Cette sensibilité est connue sous le nom d'"effet papillon".

Système dynamique (s.d.)?

Système dont l'ensemble des variables qui en caractérisent l'état suit une **loi d'évolution temporelle**.

Mathématiquement: $x_t = F(x_0, t)$.

Cette dépendance temporelle est unique, on parle de **déterminisme**.

Utilité ?

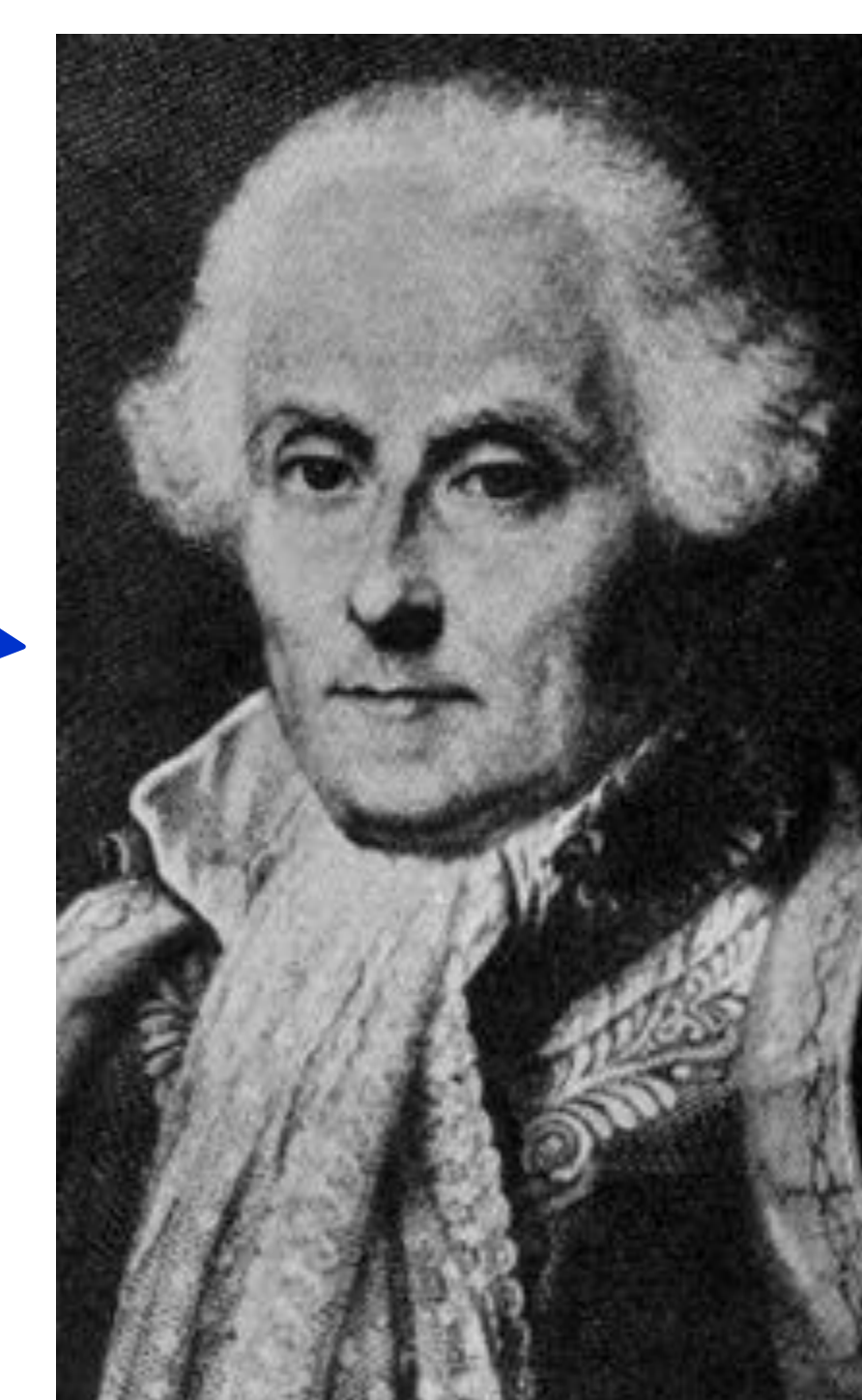
Les s.d. sont utilisés entre autres pour "**prédire l'avenir**" à partir du présent.



Jules Henri Poincaré (1854 - 1912)

" Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. "

"Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. "



Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827)

Sensibilité aux conditions initiales ?

Pour les s.d. unidimensionnels :

- l'exposant de Lyapunov: $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{dF(x_0, t)}{dx} \right|$
- marge d'erreur "de prévision" : $\varepsilon_t \approx \varepsilon_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Si $\lambda > 0$ et si les valeurs de F sont bornées dans le temps, on dit que le système est sensible aux conditions initiales et on le qualifie alors de chaotique.



Effet papillon ?

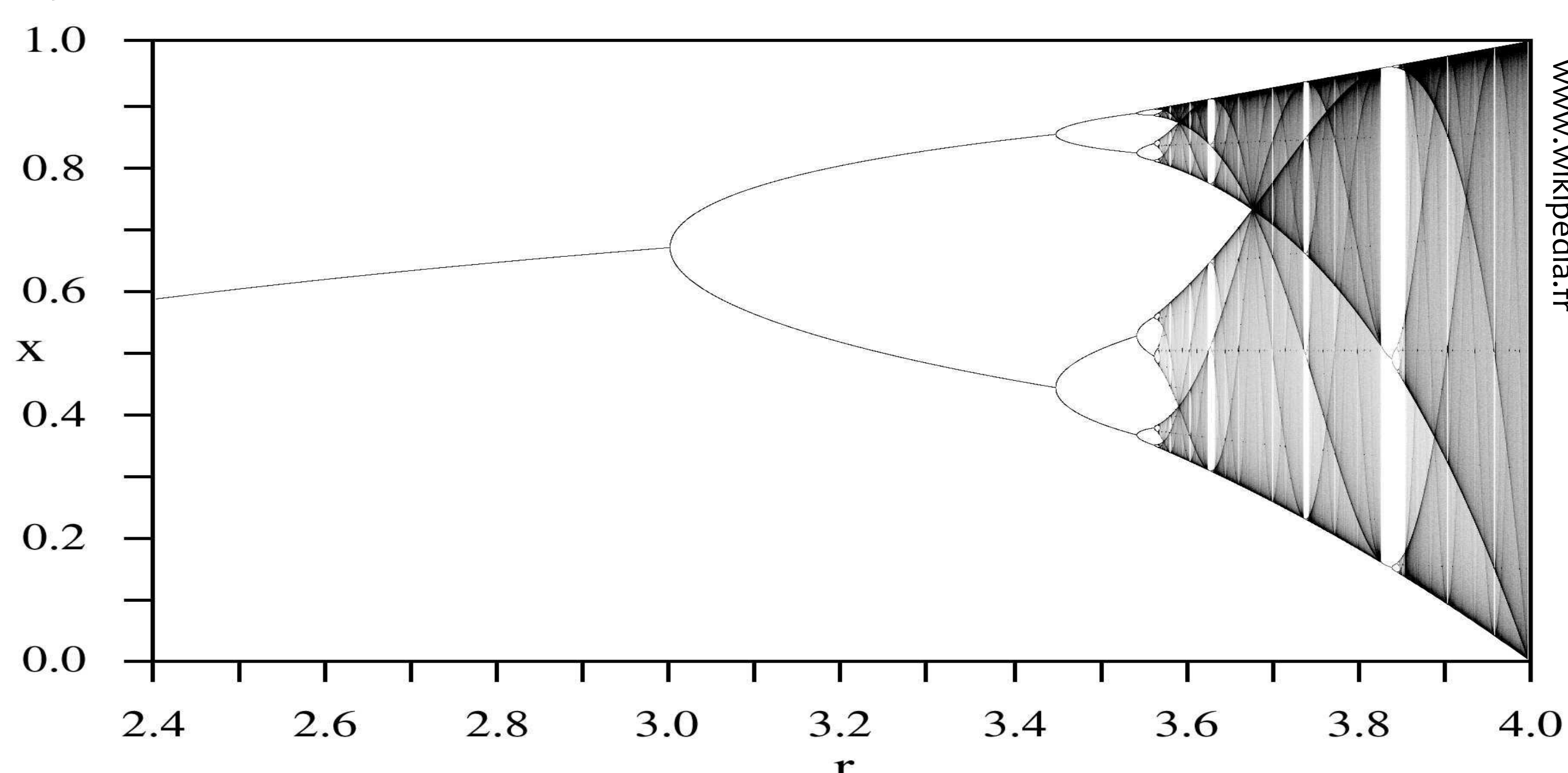


Edward Lorenz (1917 - 2008)

" Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas? "

La suite logistique

On définit $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ avec $0 < x_0 < 1$. Cette suite a un comportement chaotique si r dépasse ~3,57:



Applications

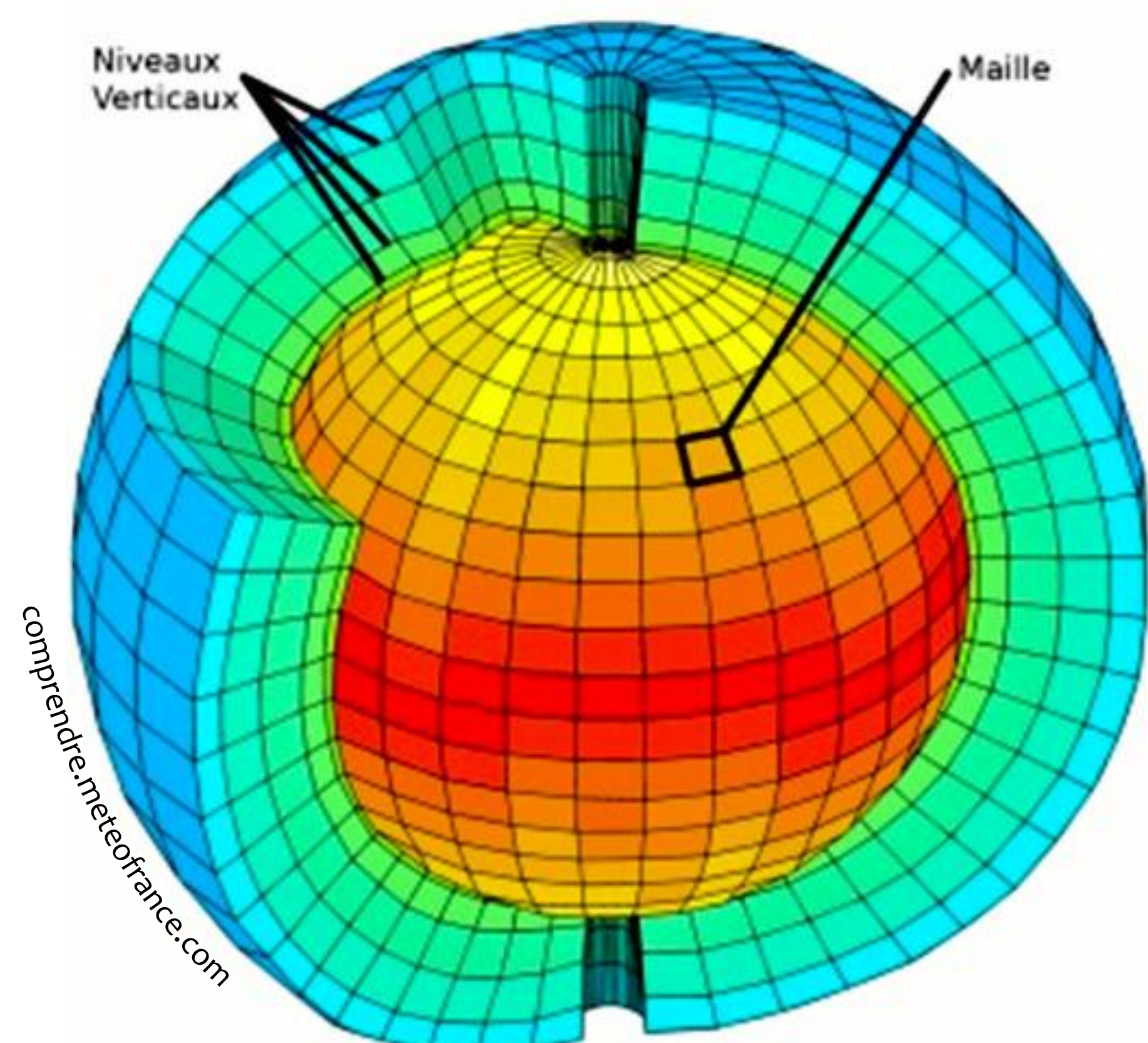
La théorie du chaos a de nombreuses applications dans beaucoup de domaines : **météo, circuits électriques, astronomie, théorie des fractales, économie...**

LE CHAOS – LYAPUNOV CONTRE VENTS ET MARÉES

M. Badalyan, M. Bulnes Cuetara, Nguyen H.S., P. Schram
Département de Mathématique

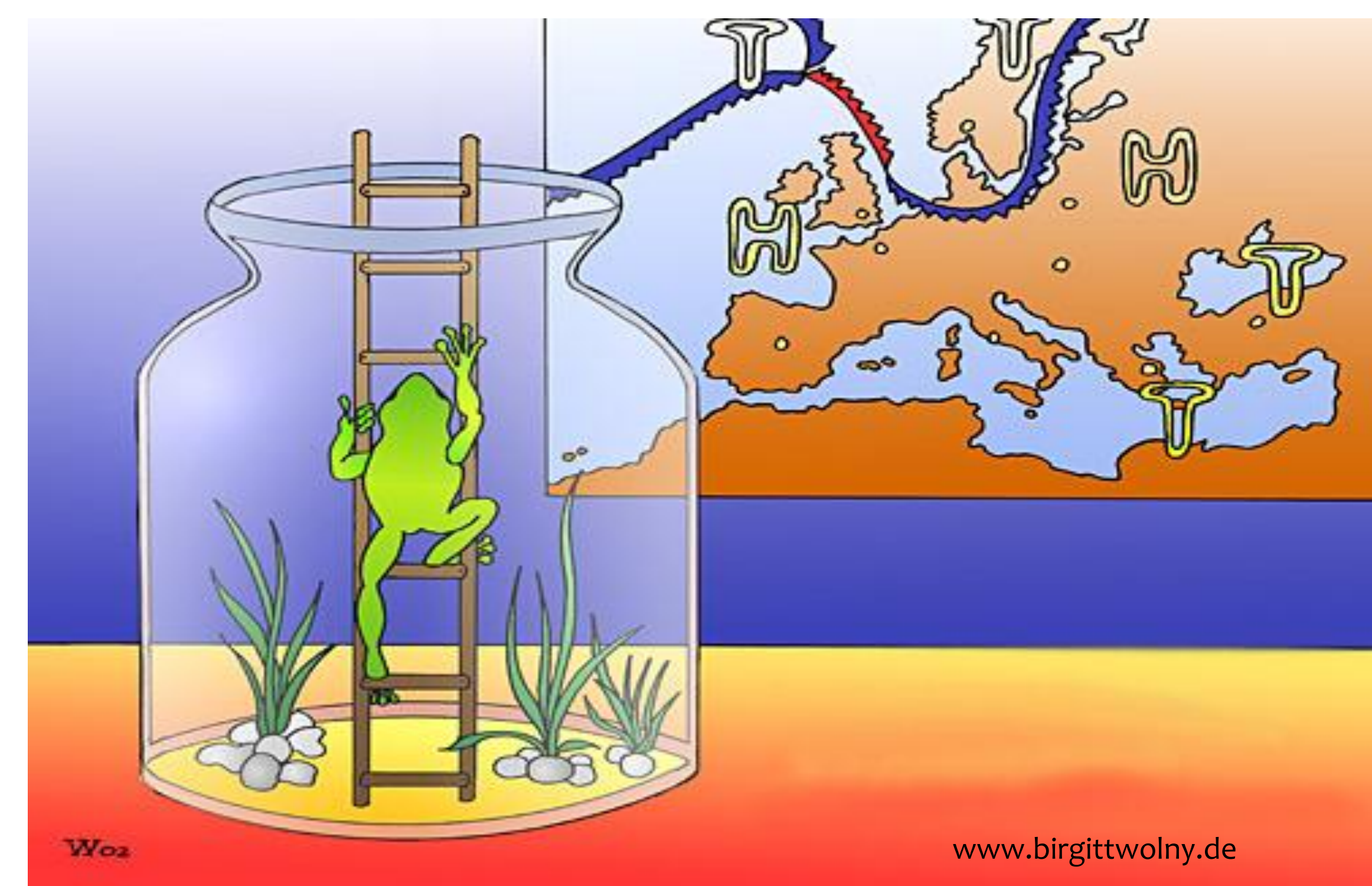
Pluie ou beau temps, quel temps pour demain?

En suivant les étapes décrites ci-dessous, les prévisionnistes essayent de déterminer les états futurs des paramètres atmosphériques et d'en déduire l'évolution future.



A. Décomposition de l'atmosphère en mailles; prise ou estimation de données en chaque noeud.

B. Calcul numérique sur base des données récoltées.



C. Détermination de la météo par interpolation à partir des valeurs calculées.

Prévoir le temps un mois à l'avance?

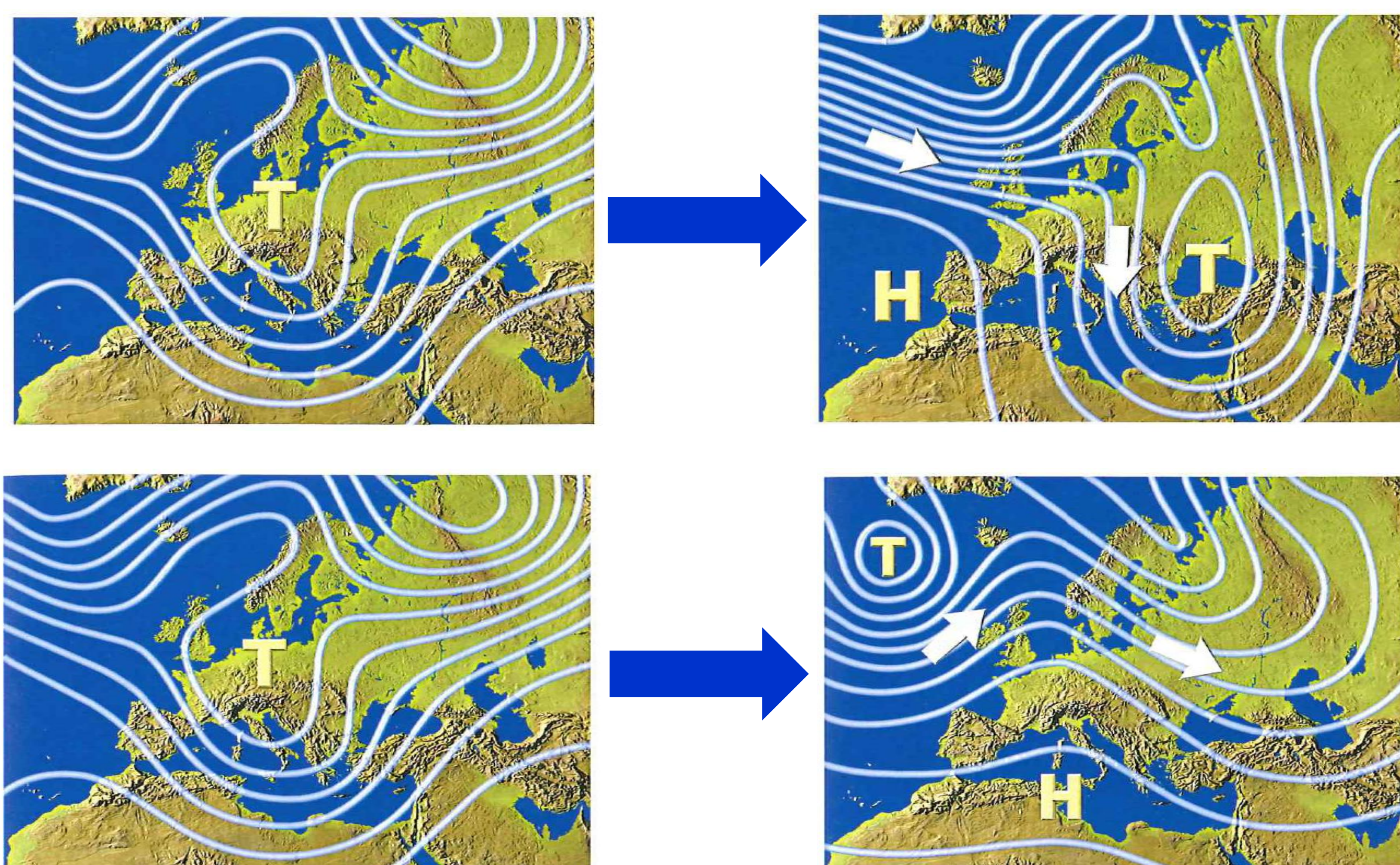
Les étapes A et B sont source d'**erreurs** :

Les mailles ne sont pas infiniment petites et les algorithmes pas infiniment puissants!

La dynamique météorologique présente en effet un caractère **chaotique** (amplifications exponentielles).

Sensibilité aux conditions initiales

Deux situations très similaires évoluent différemment en 7 jours:
(T: région de basse pression; H: région de haute pression)



J.Bublath (2007). *Chaos Im Universum*.DTV

D'après Lorenz : Une prévision de 14 jours est le maximum possible!

Aujourd'hui : 10 jours de prédictibilité pour les modèles globaux, 3 jours pour les modèles locaux.

L'anticipation de la météo au service de l'énergie renouvelable?



Estimer la force du vent ou la durée d'ensoleillement permet d'**estimer** et **optimiser** le rendement des éoliennes et des panneaux solaires.

Le caractère chaotique de la météo complique cette tâche.