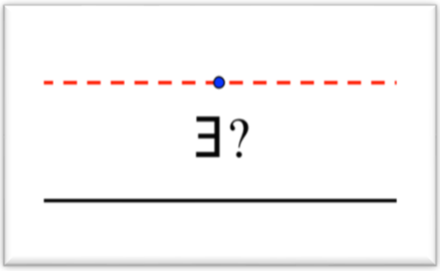
L'Univers, à tore et à travers

La géométrie étudie certains espaces et les propriétés des objets qui y vivent. En géométrie classique, dans le sens utilisé par Poincaré, l'espace considéré (généralement bi- ou tridimensionnel) est continu, infini, homogène (tous les points sont identiques) et isotrope (en chaque point, toutes les directions, *i.e.* toutes les droites, sont identiques). Construire une telle géométrie consiste ainsi à définir les quatre objets fondamentaux que sont le point, la droite, le plan et l'espace, et à décrire leurs règles d'agencement, formant un système de *postulats* ou *axiomes* (propriétés acceptées sans démonstration) à partir duquel on pourra déduire tous les résultats possibles concernant la géométrie considérée.

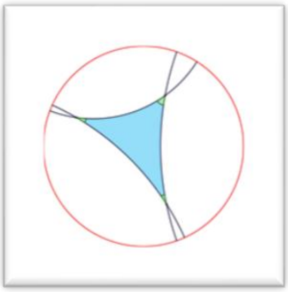
Fondée sur la base de notre expérience quotidienne du monde physique, formalisée par Euclide dans ses *Éléments* (IIIe siècle *AC*), la géométrie dite "euclidienne" en est un exemple; elle se fonde sur cinq postulats, dont le dernier (le "postulat des parallèles") peut, dans notre formulation moderne, être énoncé comme suit: « *par un point extérieur à une droite, on peut faire passer une et une seule droite parallèle à cette droite* ».

Longtemps, les successeurs d'Euclide ont pensé que ce cinquième postulat était d'une autre nature et devait pouvoir se démontrer à partir des quatre autres. Saccheri, pour citer un de ces mathématiciens, a essayé toute sa vie de le démontrer par l'absurde, sans succès. Cependant, imaginer un espace où les quatre premiers postulats seraient vérifiés mais non le cinquième allait totalement à l'encontre de l'intuition physique et semblait de ce fait impossible.

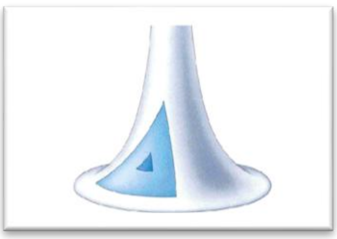


Il faudra attendre 1813, pour que Gauss admette enfin la possibilité d'existence d'une géométrie où ***le cinquième postulat d'Euclide serait nié***; pour éviter les critiques, il ne publiera cependant rien sur le sujet. Vers 1830, N.I. Lobatchevski et J. Bolyai construisent (officiellement) une géométrie où par un point donné extérieur à une droite donnée passent au moins deux parallèles à cette droite, niant ainsi le cinquième postulat. Ils créent alors "un autre monde, un nouveau monde à partir de rien" (selon les termes de Bolyai), qui sera l'espace hyperbolique. Ils y découvrent de surprenantes propriétés (certaines déjà découvertes par Saccheri, qui tentait, en vain, d'y trouver une contradiction):

1. les seules figures semblables sont les figures égales;
2. par trois points non alignés, il ne passe pas nécessairement un cercle;
3. la somme des angles d'un triangle est strictement inférieure à π rad;
4. l'aire de tout triangle est bornée supérieurement; plus précisément, pour un triangle d'angles α_i, l'aire vaut $\frac{1}{k}(\pi - \sum_i \alpha_i)$, pour une certaine constante k (qui correspond à la valeur absolue de la courbure gaussienne de l'espace considéré).

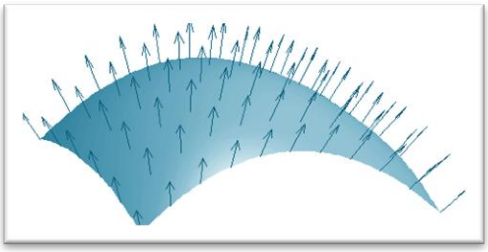


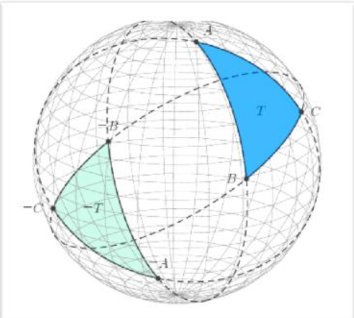
Cependant, cette nouvelle géométrie n'était pas encore à l'abri de contradictions internes… Afin de s'assurer de sa consistance, il s'agissait d'en créer un modèle euclidien; car alors, si l'on suppose la géométrie euclidienne consistante (ce qui fut par ailleurs démontré par Tarski), le théorème de complétude de Gödel nous assure que la géométrie hyperbolique l'est aussi. La construction du ***disque de Poincaré*** et de la pseudosphère de Beltrami joua ce rôle précieux.



Beltrami fournit, grâce à sa ***pseudosphère***, une première surface dans $\mathbb{R}^3$ sur laquelle tient la ***géométrie hyperbolique***. Viennent alors les travaux de B. Riemann, qui introduit et étudie des espaces courbes, plus précisément ce que l'on appelle des variétés riemanniennes. Dans de tels espaces, on peut définir une géodésique comme le chemin le plus court (ou l'un d'eux s'il y en a plusieurs) entre deux points ; c'est ce qui jouera le rôle des segments de droites. D'autre part, la structure métrique de ces espaces permet d'y définir des notions de courbure.

Dans le cas particulier d'une ***surface différentiable orientée*** S dans $\mathbb{R}^3$ on peut définir un unique ***champ normal unitaire*** compatible avec l'orientation de S; l'opposé de la différentielle de ce champ est appelé l'endomorphisme de Weingarten, dont le déterminant est la courbure de Gauss de S, correspondant exactement à notre notion intuitive de courbure.





La courbure des surfaces doit être constante si l'on veut pouvoir les munir d'une géométrie homogène. À côté de la géométrie hyperbolique, dont on peut munir des surfaces à courbure constante négative, est ainsi introduite la ***géométrie sphérique***, dont on peut munir des surfaces à courbure constante positive, comme la sphère. On y nie le postulat des parallèles de la manière suivante: par un point donné extérieur à une droite donnée, il ne passe aucune droite parallèle à cette droite. Dans ce cadre, on démontre que la somme des angles d'un triangle est strictement supérieure à π rad et que l'aire d'un triangle d'angles α_i vaut $\frac{1}{k}(\sum_i \alpha_i - \pi)$ (ici $k = \frac{1}{R^2}$ où R est le rayon de la sphère considérée, parallèlement au résultat correspondant en géométrie hyperbolique).

Parmi les propriétés étonnantes observées dans des géométries non-euclidiennes, indiquons qu'en géométrie hyperbolique le problème classique de la quadrature du cercle (*i.e.* la construction à la règle et au compas d'un carré dont l'aire vaut celle d'un cercle donné) devient possible, alors qu'elle ne l'est pas en géométrie euclidienne: il est en effet possible, dans le disque de Poincaré, de construire à la règle et au compas un carré dont les quatre angles sont égaux à $\frac{\pi}{4}$, donc dont l'aire vaut π.

Beltrami sera l'un des premiers à étudier la modification des lois de la Physique dans un espace à courbure négative; Riemann y songera lui aussi. Mais il faudra cependant attendre les travaux d'Einstein et l'avènement de la relativité générale pour que les espaces courbes acquièrent leur importance fondamentale en Physique, la structure métrique de notre univers s'avérant être d'une grande complexité. Après l'établissement de sa théorie de la relativité restreinte, Einstein cherchait à pallier le problème de l'instantanéité des interactions gravitationnelles. Désireux d'obtenir une expression unifiée des lois de la dynamique, de la gravitation et de l'électromagnétisme, qui soit identique dans *tous* les référentiels (inertiels, accélérés, etc.), il élabora ainsi la théorie de la relativité générale, qui ajoute à la relativité restreinte que la matière déforme localement l'espace-temps lui-même. Dans cet ***espace-temps à courbure compliquée***, les trajectoires satisfaisant le principe de moindre action correspondent aux géodésiques; la gravitation n'est désormais plus vue comme une force, mais comme la manifestation de la courbure de l'espace-temps. À travers la cosmologie, qui étudie les solutions de l'équation d'Einstein, cette théorie possède d'innombrables conséquences, notamment en ce qui concerne l'expansion de l'Univers, sa structure, les trous noirs, etc.