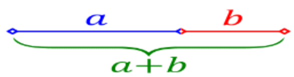
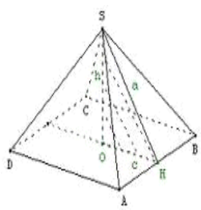
LES MATHEMATIQUES EN ARCHITECTURE

Le nombre d'or

Le nombre d'or, noté φ en mémoire de l'architecte grec Phildas, découle de la proposition d'extrême et de moyenne raison d'Euclide. Cette proposition géométrique montre que si l'on sectionne un segment en deux segments de longueurs différentes de la manière suivante:



alors, le rapport du segment « a+b » sur le segment « a » est égal au rapport du segment « a »sur le segment « b ».
Quelques petits calculs nous amènent à une équation du second degré :
La recherche de la racine positive nous donne le nombre 1,618003... correspondant à la valeur du nombre d'or.
Il existe plusieurs applications du nombre d'or. Dans notre exposé, nous nous intéresserons à la pyramide de Khéops et au Modulor. Malheureusement, de nos jours, certaines personnes mettent ce nombre à toutes les sauces et des mythes se créent autour de celui-ci.



La pyramide de Khéops fut bâtie comme les autres pyramides de Gizeh en l'honneur des rois égyptiens il y a 4500 ans. La hauteur de cette pyramide vaut 148,2m et le côté de la base carrée 232,8m que l'on divise par 2 afin d'appliquer le théorème de Pythagore. Ce dernier nous donne la longueur de l'hypothénuse, à savoir 188,44m. Le rapport de celle-ci sur le petit côté du
triangle rectangle vaut φ. La pyramide de Khéops possède certaines propriétés mathématiques pour des raisons astronomiques.
Le Modulor est une échelle basée sur le nombre d'or qui suit la progression de la suite de Fibonacci . Le Corbusier est l'architecte qui a conçu le Modulor. Son but était de déterminer les dimensions de l'environnement mobilier où l'homme se sent bien. Il construit sa grille sur base d'un homme de 1m83 levant le bras et adapte le mobilier aux différentes parties du corps humain.

Les fractales en architecture

Apparues au dix-neuvième siècle, les fractales ne furent théorisées rigoureusement que dans les années 1970 par Benoît Mandelbrot, un mathématicien franco-américain né à Varsovie en 1924 et décédé en 2010 à Cambridge dans le Massachusetts. Dans sa théorie de la rugosité, le mot "fractale" désigne un objet invariant (ou presque) par changement d'échelle: Quelle que soit l'échelle d'observation, la structure a un aspect similaire. Intuitivement, on peut voir une fractale comme une transformation récursive d'un objet en plusieurs copies de lui-même plus petites.
On distingue trois types de fractales: Premièrement, il y a les systèmes de fonctions itérées qui ont une règle de remplacement géométrique fixe comme le triangle de Sierpinski. Ensuite, il y a celles définies par une relation de récurrence en chaque point de l'espace considéré. Enfin, il existe des fractales dites aléatoires qui sont générées par des processus stochastiques: Le choix de l'action à faire pour répliquer l'objet suit une loi de probabilité donnée.
Le triangle canonique de Sierpinski se construit en procédant par l'algorithme suivant:
1. Tracer un triangle équilatéral.
2. Tracer les 3 segments qui joignent deux à deux les milieux des côtés du triangle, ce qui délimite 4 nouveaux triangles.
3. Enlever le petit triangle central.
4. Recommencer à la deuxième étape avec chacun des triangles obtenus.

En outre, on retrouve les fractales en architecture notamment dans la géométrie de certains villages africains comme celui de Ba-ïla en Zambie. Les cases du village sont disposées d'une manière pouvant être qualifiée de fractale. Les maisons forment la limite du village, laissant un espace inoccupé par des habitations en son centre, à l'exception de la maison du chef du village. Les autres maisons qui forment les limites du village sont disposées en fonction de l'importance sociale des habitants. Les habitants les moins considérés sont laissés près de l'entrée, tandis que les notables ont une place plus centrale dans le village, près de la maison du chef.

The Gateway Arch de Saint Louis

Depuis la nuit des temps, les mathématiques et l'architecture sont deux disciplines complémentaires et indissociables dans l'art de bâtir. D'ailleurs, dans le temps, les architectes étaient des mathématiciens. Nous allons vous présenter dans cette section deux monuments qui mettent en évidence la dualité entre les mathématiques et l'architecture : The Gateway Arch et La Géode.

The Gateway Arch ou Gateway to the West est une arche qui représente l'épicentre du Jefferson National Expansion Memorial à Saint Louis , dans le Missouri. Avec ses 192 mètres de hauteur, c'est l'un des plus grands monuments architecturaux construits par l'homme. Sa forme géométrique n'est pas une parabole mais une chaînette. Les équations géométriques qui permirent de modéliser sa structure furent mises au point par l'ingénieur germano-américain Hannskarl Bandel. Les équations sont les suivantes: $y = A \left(\cosh Cx/L - 1 \right) \leftrightarrow x = L/C \cosh^{-1} \left(1 + y/A \right)$ où $A = f_c (Q_b / Q_t - 1)^{-1} = 68{,}7672$ et $C = \cosh^{-1} (Q_b / Q_t) = 3{,}0022$.

La Géode

La Géode est un théâtre au parc de la Villette situé dans la cité des sciences et de l'industrie à Paris. Il s'agit d'une sphère de 36 mètres de diamètre , constituée de 6433 triangles en acier. Ce monument est inspiré d'une forme géométrique du même nom qui est un polyèdre non régulier convexe inscrit dans une sphère.

La Sagrada Familia

L'Expiatori de la Sagrada Familia, qui habille le paysage urbain de Barcelone depuis la fin du dix-septième siècle, relève du travail exemplaire de l'architecte Gaudi qui, grâce à ses études avancées en mathématiques, en physique et en géométrie, développa un système géométrique très complet afin de réaliser des œuvres de la sorte. Cette véritable attraction touristique qu'est la Sagrada Familia fut construite et achevée grâce à une combinaison de surfaces telles que des hyperboloïdes de révolution, des paraboloïdes hyperboliques et des hélicoïdes. Cela fut rendu possible grâce à la fabrication de modèles en plâtre utilisés dans le façonnement des différentes structures de l'église. Il existe des méthodes de travail que Gaudi employa pour utiliser ces modèles de plâtre telles que la couture numérique définie comme étant le travail autour d'une armature virtuelle dans laquelle les figures associées s'agencent entre elles et le modelage numérique défini comme étant la soustraction booléenne d'une surface dans le but d'obtenir le résultat inverse de notre outil de travail de départ. Par exemple, on pouvait obtenir un hyperboloïde concave en supprimant le gabarit d'un hyperboloïde convexe.

Au fil des années, Gaudi développa une technique précise utilisant la géométrie pour mettre sur pied ses projets d'architecture. En anglais, on appelle cette technique *the Gaudinian geometry.* Les grandes lignes de cette technique de géométrie se résument par l'utilisation d'une sélection de courbes sinusoïdales et de spirales, l'inclinaison des colonnes, l'usage d'isométries comme les translations et les rotations, l'emploi de similarités et de proportions et la présence de structures rectilignes et de transformations héliocoïdales. La géométrie est donc présente dans l'entièreté de la construction de Gaudi, que ce soit la géométrie 2D présente dans la forme des colonnes ou la géométrie 3D présente dans la structure des escaliers ou du plafond de la cathédrale.

Questions pour les élèves

Quelle est la valeur exacte du nombre d'or? (1+sqrt (5))/2
Qu'est-ce que le Modulor? Par qui a-t-il été inventé? C'est une silhouette humaine standardisée servant à concevoir la structure et la taille des unités d'habitation. Il a été inventé par Le Corbusier.
Citez un exemple de fractale. Réponse: Le triangle de Sierpinski, le flocon de Koch...
Qu'est-ce que la Géode? Où se situe-t-elle? Réponse: C'est un théâtre situé dans la cité des sciences et de l'industrie à Paris.
Quelle forme géométrique en 3 dimensions est représentée par les escaliers en colimaçon de la Sagrada Familia? Réponse: Un hélicoïde