

Théorie des jeux

CUTTING Christine, DISTEXHE Julie, PETERMANN Olivia, TURKOZ Derya
Département de Mathématique

La théorie des jeux est la discipline mathématique qui étudie les situations où le sort de chaque participant dépend non seulement des décisions qu'il prend mais également des décisions prises par d'autres participants. On dit que ces participants sont en situation d'interactions stratégiques.

Un peu d'histoire...

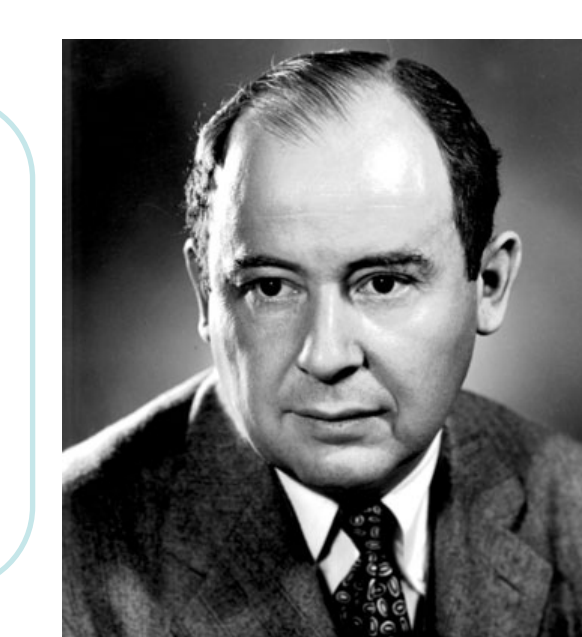
1801-1877

• Augustin Cournot
Il est un des précurseurs de la théorie des jeux. Il est surtout connu pour son travail sur les équilibres entre deux producteurs (duopole).



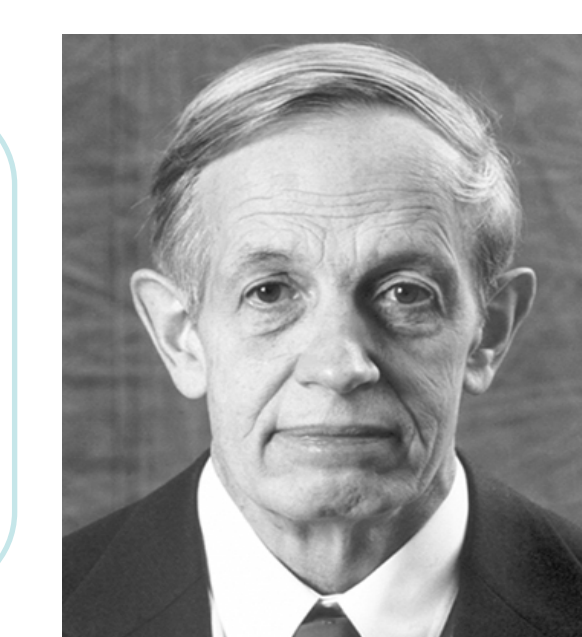
1903-1957

• John Von Neumann
Il a écrit, en collaboration avec Oskar Morgenstern, l'ouvrage intitulé « Theory of Games and Economic Behavior ».



1928-...

• John Nash
Il a généralisé le travail de Cournot en étudiant les équilibres en oligopole.
Notion: Equilibre de Nash



Types de jeux qui dépendent de...

- Relation entre les joueurs
 - Coopératif (exemple: Les chevaliers de la table ronde)
 - Non coopératif (exemple: Dilemme du prisonnier)
- Déroulement dans le temps
 - Simultané (exemple: Pierre papier ciseaux)
 - Séquentiel (exemple: Puissance 4)
- Nature de l'information
 - Imparfaite >< Parfaite (exemple: Jeu de dames)
 - Incomplète >< Complète (exemple: Bataille navale)

Les stratégies

Une stratégie est un plan d'action complet spécifiant ce que le joueur fera à chaque étape de décision et face à chacune des situations pouvant survenir au cours du jeu.

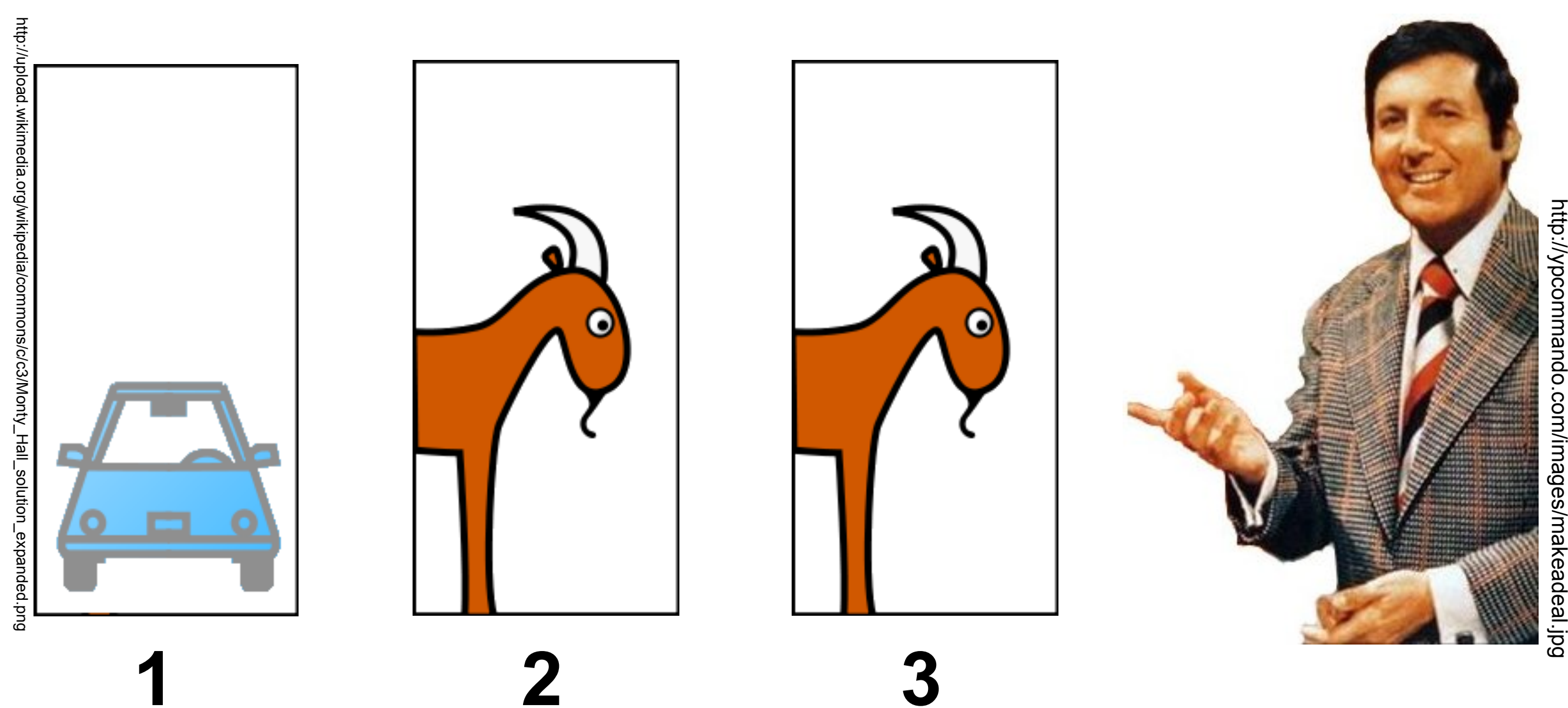
- Nous distinguons les stratégies:
- Pures
 - Mixtes
 - Dominantes
 - Optimales



Théorie des jeux

CUTTING Christine, DISTEXHE Julie, PETERMANN Olivia, TURKOZ Derya
Département de Mathématique

Le paradoxe de Monty Hall



Vous voulez gagner une voiture?
Très bien. Pour cela, vous devez choisir la bonne porte. Une fois votre choix fait, j'ouvrirai une des deux autres portes derrière laquelle il y aura une chèvre. Vous aurez alors 2 possibilités: garder votre choix ou changer.

Est-il préférable pour le joueur de changer de porte?

A priori, il a maintenant une chance sur deux de faire le bon choix, donc il est inutile de changer d'avis... Cependant, la formule de Bayes montre qu'il est avantageux de changer de porte.

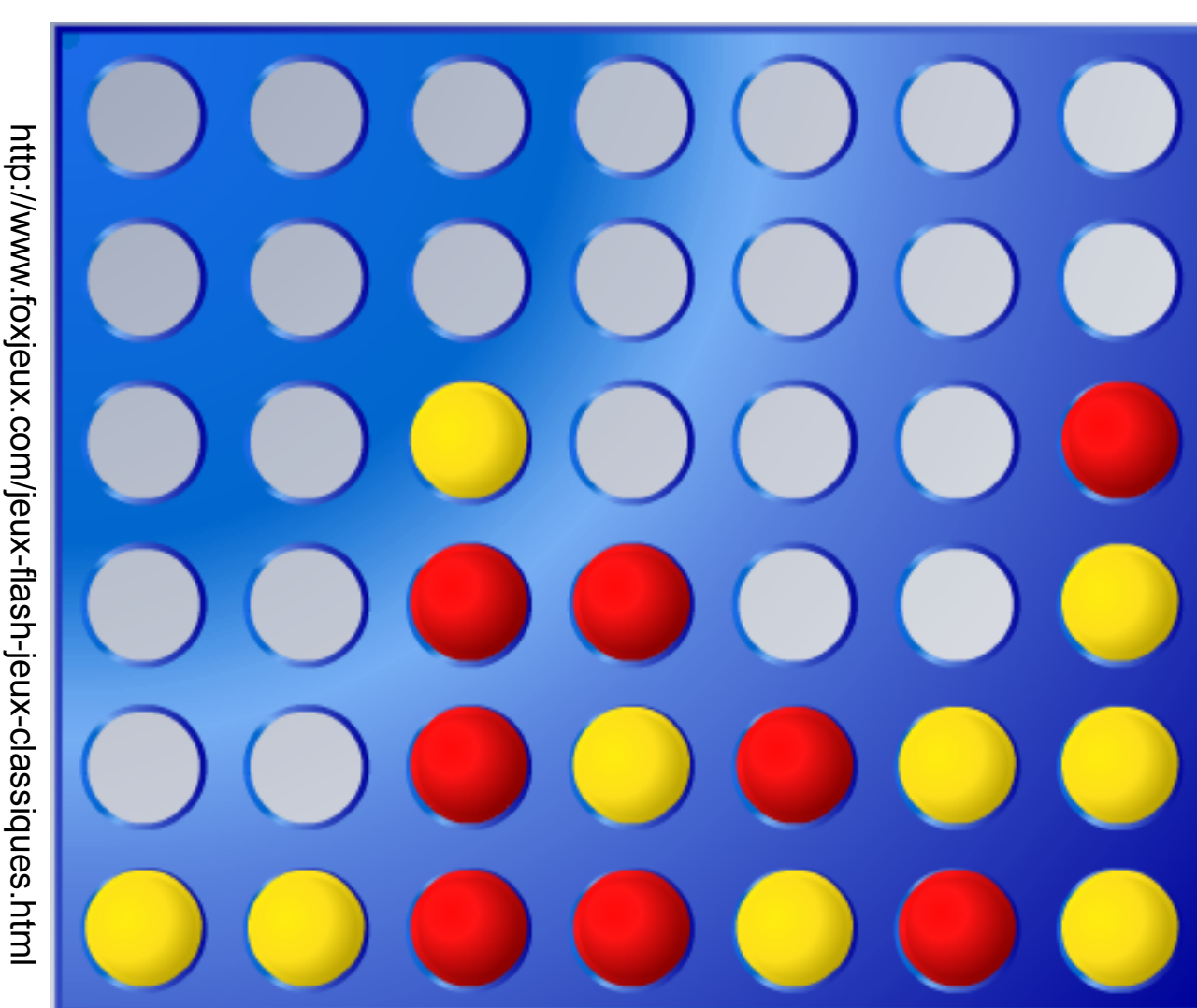
Monopoly

Grâce aux chaînes de Markov, on trouve les cases

- les plus fréquentées : prison (9,46%), Grand-Place de Mons (2,99 %)
- la moins fréquentée : Meir d'Anvers (2,06 %)



Puissance 4



Christophe et Germain jouent à Puissance 4. Christophe commence.

- ⊙ si Christophe joue dans la colonne du milieu, il a une stratégie gagnante
- ⊙ ce n'est plus le cas s'il joue dans une autre colonne

Poker menteur

Thierry lance les dés et annonce brelan de valets, une dame et un 9. Jérémie accepte. Il reçoit une paire de valets, un roi, un 10 et un 9.

Quelle stratégie est la meilleure?

- ✱ sortir la paire de valets et rejouer 3 dés dans le gobelet
- ✱ sortir la paire de valets et le roi et rejouer 2 dés dans le gobelet



Théorie des jeux

CUTTING Christine, DISTEXHE Julie, PETERMANN Olivia, TURKOZ Derya
Département de Mathématique

Le jeu de Nim

On dispose de différents ensembles de palmiers. À tour de rôle, les joueurs retirent autant de palmiers qu'ils le veulent dans un seul ensemble. Le joueur qui termine le jeu en retirant le(s) dernier(s) palmier(s) gagne.

Rappel : le système binaire

- Utilisé par les ordinateurs
- Décomposition d'un nombre en puissances de deux

Exemple : $27 = 16 + 8 + 2 + 1$

16	8	4	2	1
1	1	0	1	1

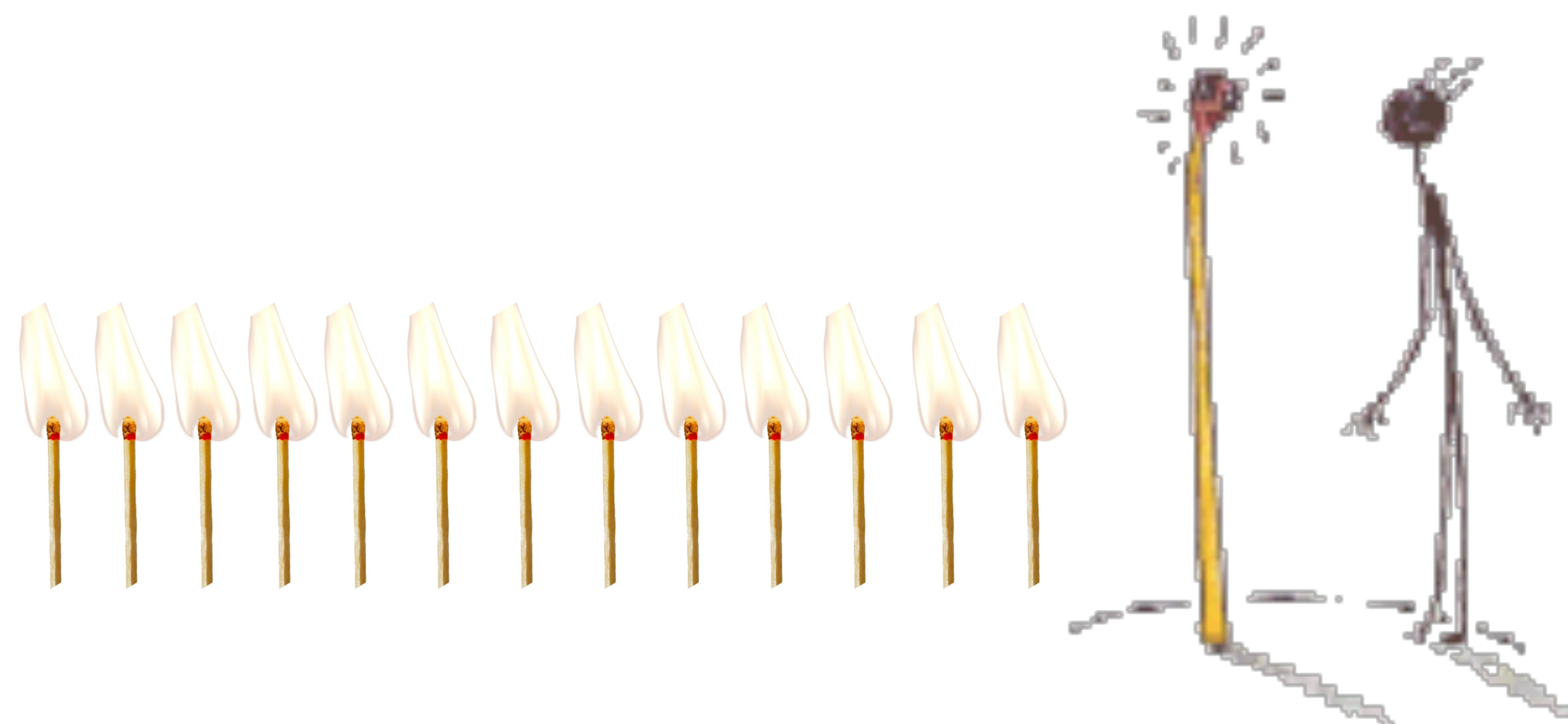
	8	4	2	1
	0	1	0	1
	0	0	1	1
	0	1	1	0
	0	1	0	0

Position impaire : au moins une colonne contient un nombre impair de « 1 »

Le premier joueur a une stratégie gagnante si et seulement si il joue sur une position impaire.

Le jeu des allumettes

On dispose d'un seul tas d'allumettes. A chaque tour, il faut en enlever une, deux ou trois. Le joueur qui termine le jeu en retirant la (les) dernière(s) allumette(s) gagne.



Le premier joueur a une stratégie gagnante si et seulement si le nombre d'allumettes au départ n'est pas un multiple de 4.

Application : Economie

CUTTING Christine, DISTEXHE Julie, PETERMANN Olivia, TURKOZ Derya
Département de Mathématique

Théorie des jeux: permet d'analyser les comportements des agents dans un marché économique, i.e. le marché est considéré comme un jeu et les agents comme des joueurs.

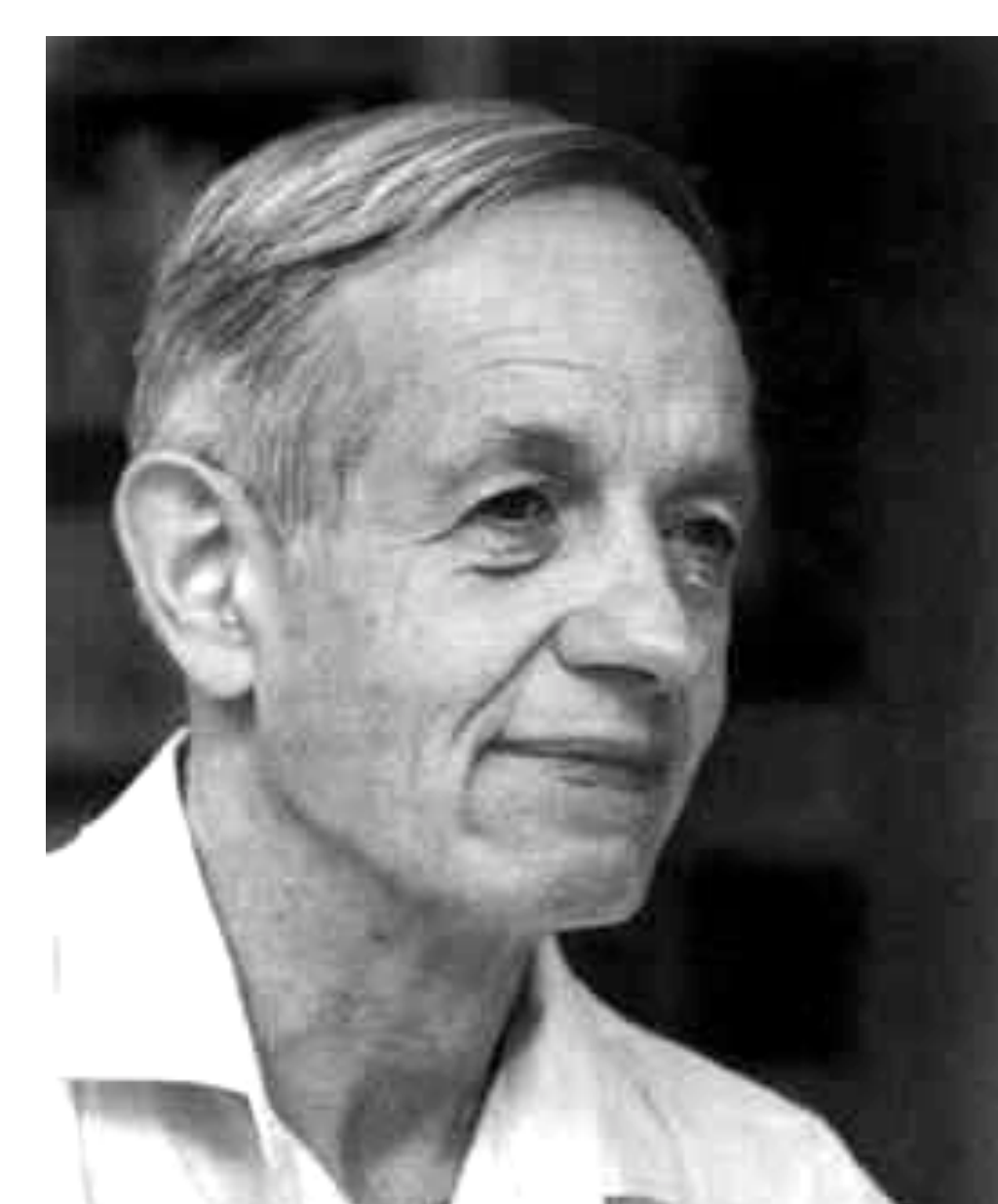
↳ INTERACTIONS STRATEGIQUES EN «OLIGOPOLE».

Equilibre de Nash situation dans laquelle tous les joueurs maximisent leur *satisfaction individuelle*.

→ *stratégie optimale* pour chaque joueur
= équilibre non coopératif

L'équilibre de Nash est la généralisation de l'équilibre de Cournot (duopole).

Il existe de nombreux résultats qui démontrent l'existence et l'unicité.



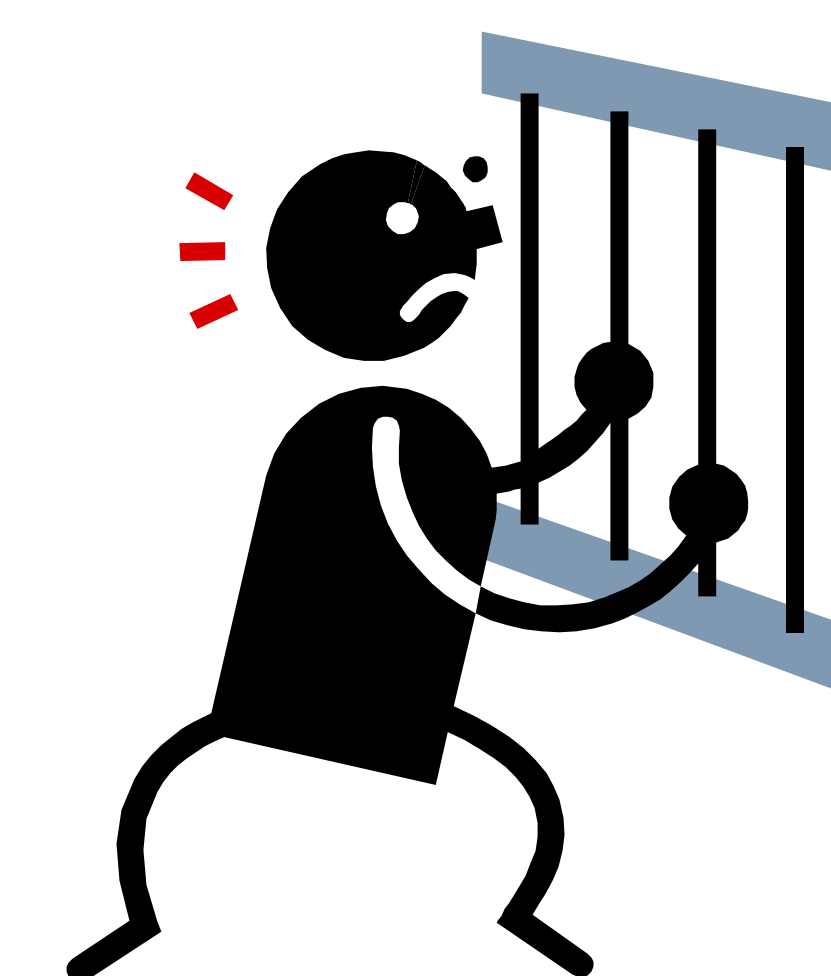
John NASH (1928-)

Soit $r : S \rightarrow S$, où S est l'ensemble des stratégies. Si $r(s)$ est une contraction alors l'équilibre de Nash est unique.

Dilemme du prisonnier 2 prisonniers doivent choisir entre dénoncer ou non le complice (pas de communication entre eux).

Prisoners' dilemma		prisoner B	
		confess	remain silent
prisoner A	confess	5 years, 5 years	0 year, 20 years
	remain silent	20 years, 0 year	1 year, 1 year

- ❖ Stratégies dominantes pour chaque « joueur »
→ DENONCER pour les 2.
- ❖ Equilibre de Nash du jeu?
→ (5;5)
- ❖ Meilleure situation pour les joueurs?
→ (1;1) qui est un optimum de Pareto. ★



★ Optimum de Pareto : il s'agit d'un état dans lequel on ne peut pas améliorer le bien-être d'un individu sans détériorer celui d'un autre.

Application en économie

		Firme 2	
		Prix bas	Prix haut
Firme 1	Prix bas	(0;0)	(10;5)
	Prix haut	(5;10)	(15;15)



équilibre de Nash
= (15;15)
= optimum de Pareto