Nombres transfinis

Un nombre <u>transfini</u> est le cardinal d'un ensemble infini, il est noté $\aleph$.

Si, entre deux ensembles infinis A et B il existe une relation d'équipotence, càd une bijection $\alpha : A \rightarrow B$, alors A et B ont le même nombre transfini comme cardinal.

<u>Exemples :</u>

. $\aleph_0$: le cardinal de tout ensemble infini dénombrable.
. $\aleph$: le cardinal de l'ensemble des réels.

<u>Ensemble des parties d'un ensemble :</u>

Ensemble des sous-ensembles de cet ensemble.

<u>Exemple:</u>

E = { 1, 2, 3 }
P(E) = { ø ; {1,2,3} ; {1,2} ; {1,3} ; {2,3} ; {1} ; {2} ; {3} }

<u>Résultats intéressants</u> :

Soit E ensemble non vide, alors :

$\#E = n \Rightarrow \# P(E) = 2^n$

$\#E < \#P(E)$

$\#P(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$

On peut alors créer des nombres transfinis toujours plus grands :

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$$

Hypothèse du continu

Existe-t-il un ensemble possédant un nombre d'éléments strictement compris entre $\#\mathbb{N}$ et $\#\mathbb{R}$? Entre le dénombrable et le continu?

Cantor a affirmé, sans réussir à le prouver, qu'il n'existe pas de nombre transfini entre $\aleph_0$ et $\aleph$.

<u>1938</u> : Gödel prouve qu'on ne peut réfuter cette hypothèse dans ZFC.

<u>1963</u> : Cohen prouve qu'on ne peut démontrer cette hypothèse dans ZFC.

➔ L'hypothèse du continu est indécidable : on peut choisir de l'utiliser ou non…

FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES