printemps des sciences

sciences enVies

du 22 au 28 mars 2010

ULB

L'infini, des Grecs à aujourd'hui

Loubna Arhoune, Florent Désert, Nicolas Fusillier, Matthieu Simon
Département de Mathématique

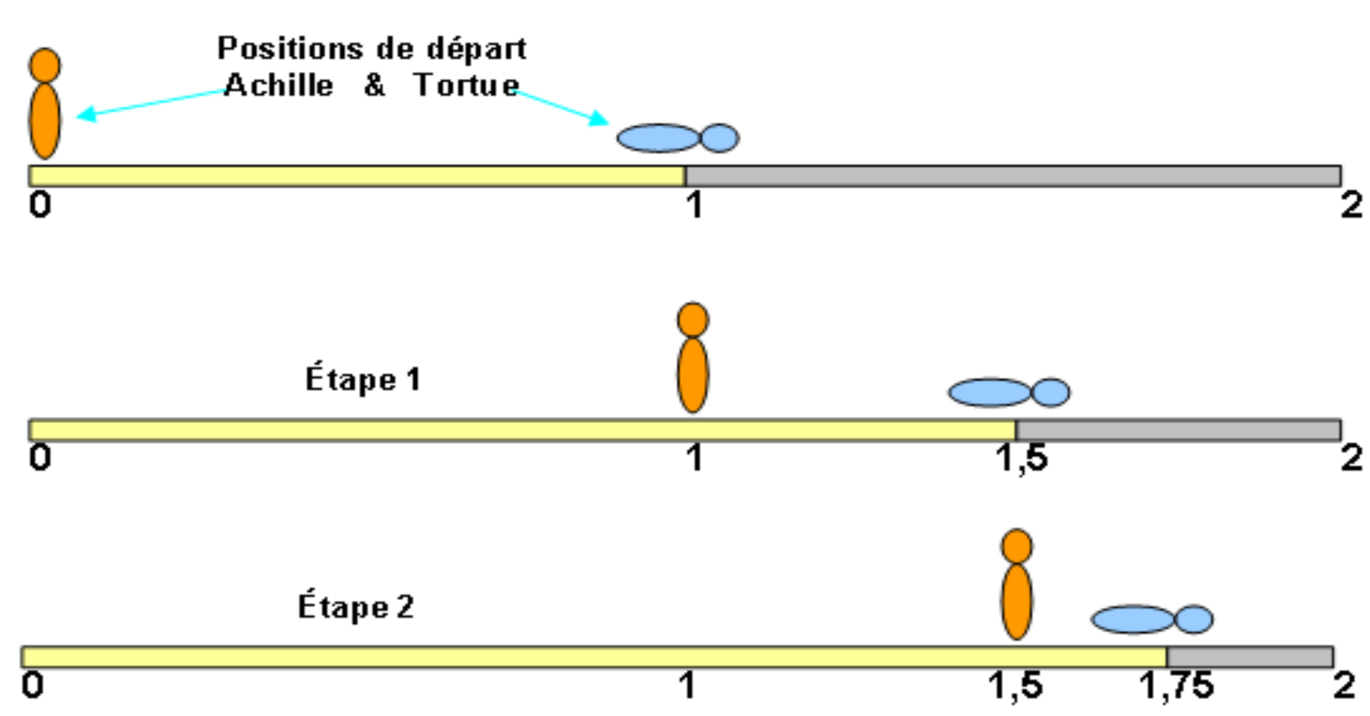
Antiquité

Rejet de l'infini par les philosophes grecs : ceux qui tentent de l'appréhender sont rebutés par divers paradoxes et situations absurdes…

Exemple : les paradoxes de Zénon

Tout mouvement est-il impossible?

Paradoxe d'Achille



Paradoxe de la dichotomie

Mais l'infini est inévitable : il est notamment présent dans les nombres irrationnels.

Aristote propose alors de distinguer 2 infinis :

Infini actuel

→ Idée d'un infini auquel on peut être confronté, qu'on peut rencontrer.

→ Aristote niait l'existence d'un tel infini.

Infini potentiel

→ Idée que l'infini n'existe pas vraiment car on ne peut jamais l'atteindre.

→ Il est potentiel, comme par exemple dans la suite des entiers, qui n'a pas de fin…

Aristote se base sur cette distinction pour contrer ces paradoxes : selon lui, la division infinie du temps n'est que potentielle, elle n'a pas de prise avec le monde réel.

Résolution des paradoxes de Zénon en mathématiques modernes par l'utilisation des séries : certaines sommes d'une infinité de termes peuvent converger, c'est-à-dire donner un résultat fini.

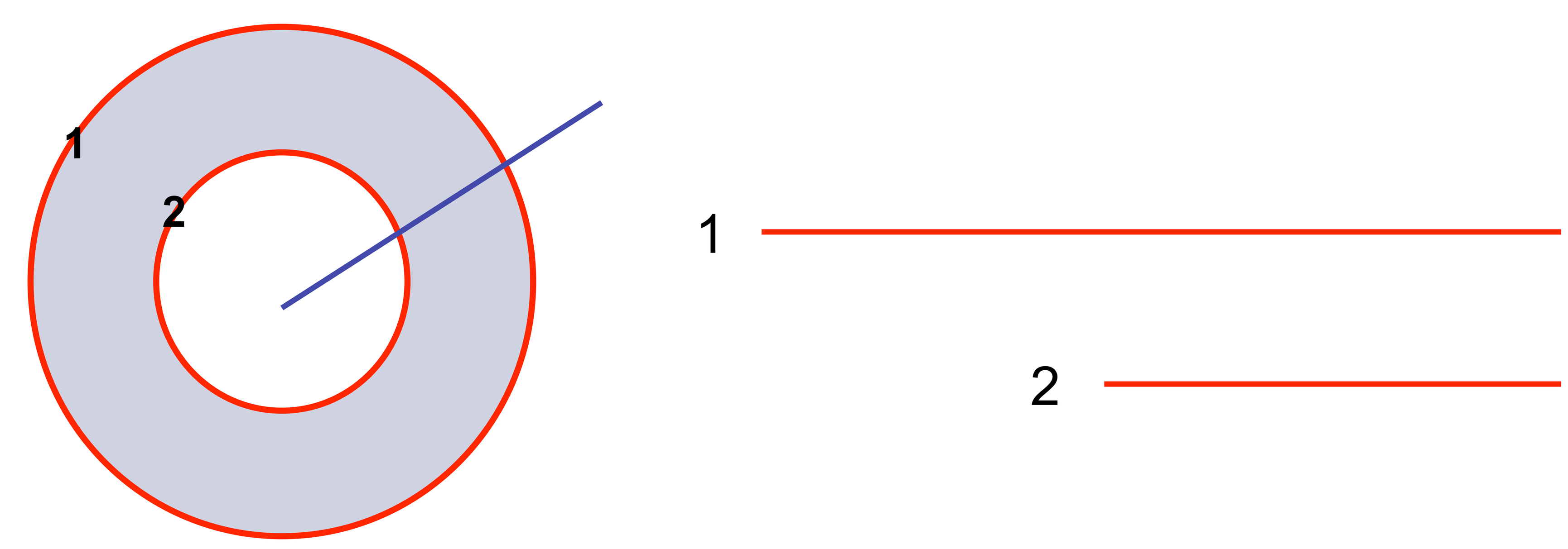
FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Moyen - Age

Les paradoxes de l'infini continuent à poser problème. La plupart des mathématiciens refusent l'idée d'un infini actuel, principalement en raison du paradoxe de la réflexivité : les quantités infinies semblent avoir le même nombre d'éléments que certaines de leurs parties strictes.

➔ une droite infinie ;
➔ deux cercles concentriques ;
➔ les naturels et leurs carrés.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**…**



XVIIème et XVIIIème siècle

- Utilisation plus marquée de l'infini en mathématiques :

    ➔ Kepler et les « infiniment petits » pour calculer les volumes.
    ➔ Création du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz (usage constant de l'infini).

Remarque :
l'infiniment petit est alors utilisé de manière empirique, sans base théorique et avec des problèmes sérieux de consistance.
- XIXème : abandon des infiniment petits au profit des limites.
- XXème : utilisation des infiniment petits dans l'analyse « non standard ».


Bernard Bolzano

- Bolzano révolutionne le concept d'infini : il le définit à partir de ses paradoxes (réflexivité).

Idée de Bolzano :
l'opération d'inclusion «$\subset$» et celle de cardinal «#» ne doivent pas être confondues:

$A \subset B \Rightarrow \#A \leq \#B$

égalité possible!

Définition de Dedekind :

Un ensemble est infini s'il contient le même nombre d'éléments qu'une de ses parties propres.

FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

XIXème et XXème siècle

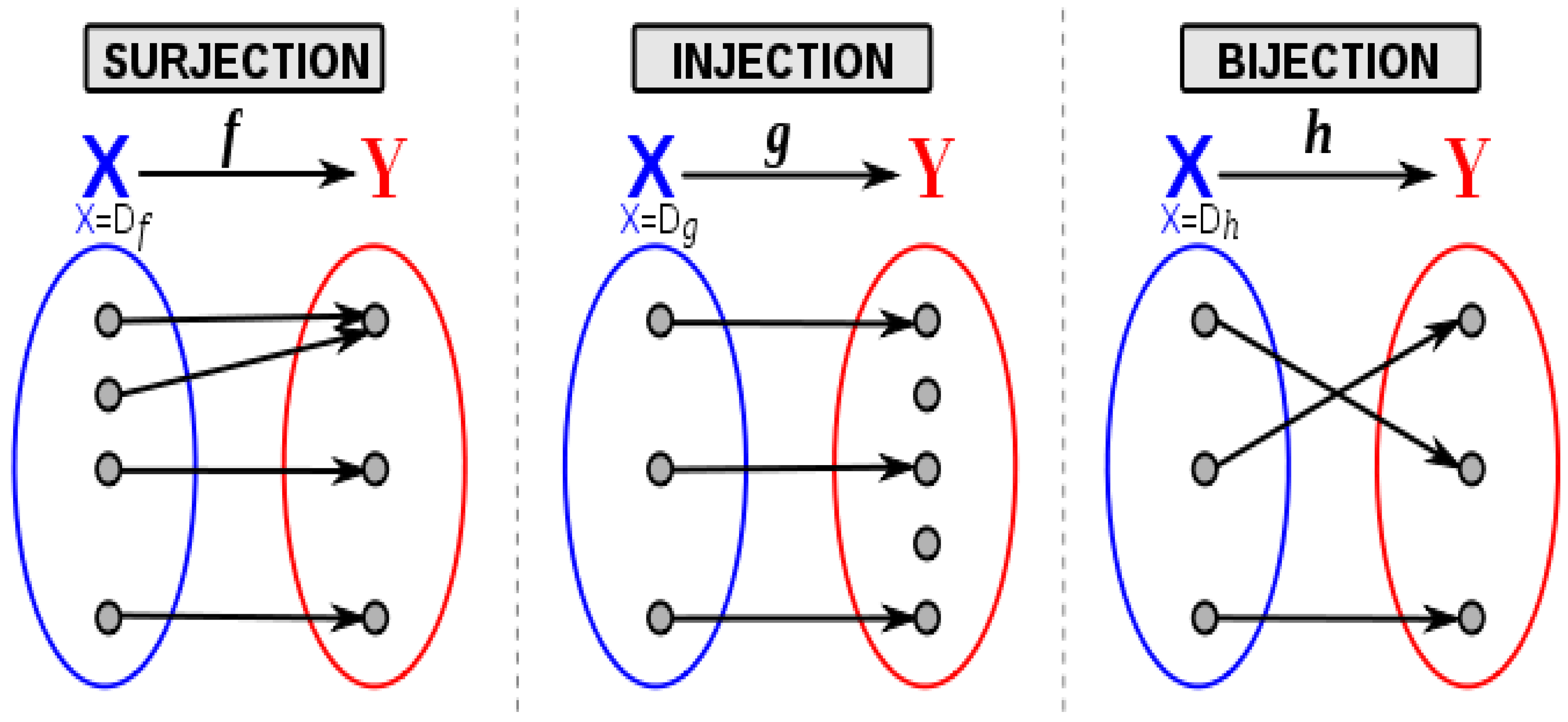
Cantor : fondation d'une véritable « mathématique de l'infiniment grand »

- ➔ comparaison d'ensembles infinis (par bijection) ;
- ➔ il existe différents infinis ;
- ➔ création des nombres transfinis.

Cantor admet et utilise l'infini actuel…

Georg Cantor

Bijection :



Deux infinis différents dans les réels :

L'infini « dénombrable »

➔ *Un ensemble infini est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}_0$.*
Ex : $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,…

➔ Les éléments de ces ensembles peuvent être classés selon un ordre précis.

L'infini « continu »

➔ *Les ensembles infinis n'étant pas en bijection avec $\mathbb{N}_0$ sont dits continus.*

➔ Ces ensembles ont un nombre d'éléments infini «plus grand» que le dénombrable.

➔ Éléments impossibles à dénombrer.
Ex : [0,1] , $\mathbb{R}$, …

Il y a autant de naturels pairs que de naturels :

On a la bijection $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow 2\mathbb{N}$, $n \longrightarrow 2n$

▪ *A chaque nombre naturel :*									
1	2	3	4	5	6	7	8	…	∞
↓	↓	▪ *On associe un naturel pair :*							
2	4	6	8	10	12	14	16	…	∞

Il y a autant d'entiers que de naturels :

On a la bijection $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$

$$z \longrightarrow \begin{cases} 2z+1 & \text{si } z \geq 0 \\ -2z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

▪ *Entiers négatifs (et 0) :*								
		0	-1	-2	-3	-4	…	
▪ *Naturels :*								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
▪ *Entiers positifs :*								
		1	2	3	4	…		

Nombres transfinis

Un nombre <u>transfini</u> est le cardinal d'un ensemble infini, il est noté $\aleph$.

Si, entre deux ensembles infinis A et B il existe une relation d'équipotence, càd une bijection $\alpha : A \rightarrow B$, alors A et B ont le même nombre transfini comme cardinal.

<u>Exemples :</u>

. $\aleph_0$: le cardinal de tout ensemble infini dénombrable.
. $\aleph$: le cardinal de l'ensemble des réels.

<u>Ensemble des parties d'un ensemble :</u>

Ensemble des sous-ensembles de cet ensemble.

<u>Exemple:</u>

E = { 1, 2, 3 }
P(E) = { ∅ ; {1,2,3} ; {1,2} ; {1,3} ; {2,3} ; {1} ; {2} ; {3} }

<u>Résultats intéressants</u> :

Soit E ensemble non vide, alors :

$\#E = n \Rightarrow \# P(E) = 2^n$

$\#E < \#P(E)$

$\#P(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$

On peut alors créer des nombres transfinis toujours plus grands :

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$$

Hypothèse du continu

Existe-t-il un ensemble possédant un nombre d'éléments strictement compris entre $\#\mathbb{N}$ et $\#\mathbb{R}$? Entre le dénombrable et le continu?

Cantor a affirmé, sans réussir à le prouver, qu'il n'existe pas de nombre transfini entre $\aleph_0$ et $\aleph$.

<u>1938</u> : Gödel prouve qu'on ne peut réfuter cette hypothèse dans ZFC.

<u>1963</u> : Cohen prouve qu'on ne peut démontrer cette hypothèse dans ZFC.

➔ L'hypothèse du continu est indécidable : on peut choisir de l'utiliser ou non…

FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES