printemps des sciences
Avec le soutien de la Ministre de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Évolution(s) Révolution(s) 23 - 29 mars 2009

ULB

Fibonacci

Adam V., Herinckx A., Lommaert C., Nisol G.,
Robette M., Wéry S
Département de Mathématiques

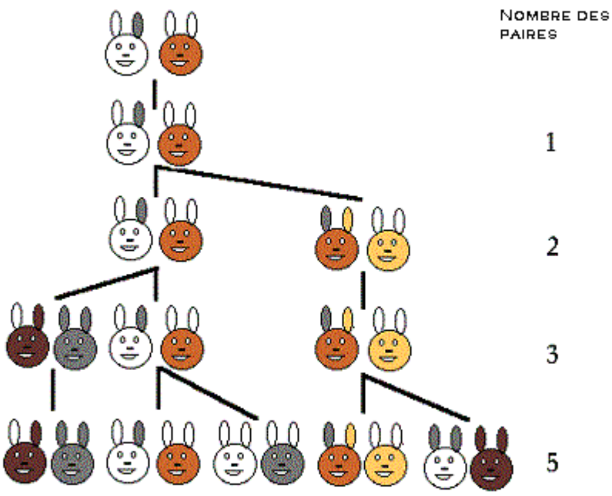
Fibonacci, de son vrai nom Leonardo da PISA (1175-1250).

Son livre « **Liber Abaci** » (livre des calculs) : problèmes commerciaux et suite de Fibonacci avec le problème des lapins.

Problème des lapins :

Combien de couples de lapins aurons-nous au bout de n mois si on suppose qu'un couple :

- engendre un autre couple par mois,
- n'engendre qu'à partir du second mois suivant sa naissance,
- est immortel ?



Suite de Fibonacci :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 …

il suffit d'additionner le nombre de couples des 2 mois précédents.

$$\boxed{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n}$$

avec F_n le nombre de couples au n$^{\text{ème}}$ mois,

$F_0 = 0$ et $F_1 = 1$

Un nombre quelconque A fait partie de la suite ssi $5A^2 + 4$ ou $5A^2 - 4$ est un carré parfait.

Propriétés de la suite de Fibonacci et du nombre d'or φ :

Formule directe (de BINET, 19e siècle) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$ donc $\frac{F_n}{F_{n-1}} \approx \varphi \Rightarrow F_n \approx \varphi . F_{n-1}$
- F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$
- Puissances du nombre d'or : $\varphi^n = F_n\,\varphi + F_{n-1}$

FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES