FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

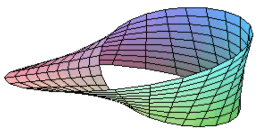
printemps des sciences
Avec le soutien de la Ministre de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Terre à terres

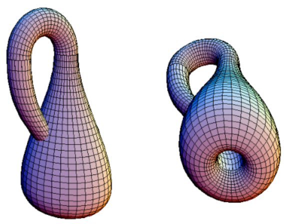
10 - 16 mars 2008

GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

Le ruban de Möbius et la bouteille de Klein

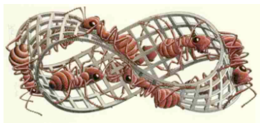


Ruban de Möbius

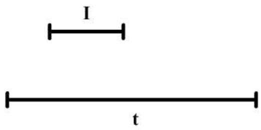


Bouteille de Klein

Le ruban de Möbius et la bouteille de Klein sont des espaces **non orientables**.
Cela signifie que l'on ne peut pas distinguer l'intérieur de l'extérieur. Autrement dit, en traçant un trait sur la surface du ruban, on pourra le parcourir en entier sans jamais avoir à lever le crayon.
Le plan euclidien est, quant à lui, orientable.



Géométrie non archimédienne: l'exemple de Hilbert



Axiome d'Archimède

« Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande. »

Pour tous réels a, b tels que a < b, il existe un entier n tel que na > b.

Cet axiome est vérifié dans le corps des réels. Que se passe-t-il si on change de corps?

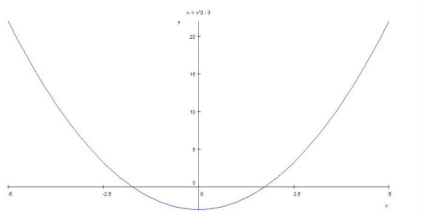
En 1899, Hilbert propose 20 axiomes comme fondations de la géométrie euclidienne. Il montre que l'axiome d'Archimède ne peut être déduit des 19 autres.

Considérons l'ensemble de toutes les fonctions algébriques de t muni des opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication, division, et $\sqrt{(1 + \omega^2)}$.

Soient a et b deux fonctions de notre ensemble, la fonction c est définie par c = a – b. A partir d'un certain point, c est toujours positive ou toujours négative (car algébrique).

- si c = a – b > 0, on pose a > b
- si c = a – b < 0, on pose a < b

Ceci ordonne notre ensemble.



Prenons la fonction constante n et comparons-la avec la fonction t : n < t pour tout n, avec l'ordre défini plus haut.
Cet ensemble n'est donc pas archimédien.

Par conséquent, le segment I dessiné plus haut et représentant notre fonction n ne pourra, dans cette géométrie, jamais en atteindre la « fin » par déplacement.