



### GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

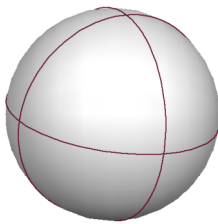
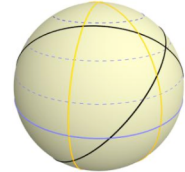
#### Géométrie elliptique

Par un point extérieur à une droite il ne passe **aucune** parallèle à cette droite ; toutes les droites sont **sécantes**.

#### Deux modèles

##### 1) Le modèle sphérique :

Deux droites sont toujours sécantes !



Triangle dont la somme des mesures des angles vaut  $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$

- Les droites sont les grands cercles de la sphère (cercles passant par deux points antipodaux).
- Deux points antipodaux sont identifiés (pour éviter que par deux points il passe une infinité de droites).
- La somme des mesures des angles d'un triangle varie entre  $180^\circ$  et  $900^\circ$ .
- Deux points déterminent non plus un, mais bien deux segments de droites différents.

L'étude des triangles sur la sphère donne naissance à la **trigonométrie sphérique**.

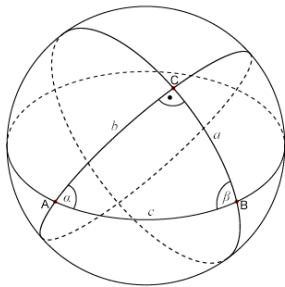
#### Théorème de Girard

Albert Girard (1595 – 1632) est un mathématicien français à qui l'on doit la démonstration de la formule donnant l'aire d'un triangle sphérique :

$$\text{Aire} = R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les angles du triangle, R le rayon de la sphère.

On lui doit aussi l'invention des notations  $\cos$  et  $\sin$ .



Soit un triangle de côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et d'angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les angles sous tendus au centre de la sphère par les parties de grands cercles correspondantes, on a alors :

$$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma$$

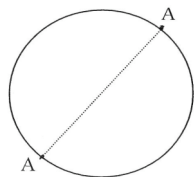
On appelle **formules de Gauss** les formules :

$$\cos(A + B/2) \sin(\gamma/2) = \cos(C/2) \cos(\alpha + \beta)$$

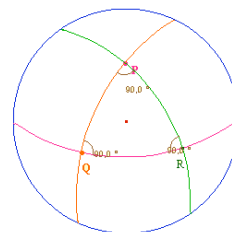
$$\sin(A + B/2) \sin(\gamma/2) = \sin(C/2) \cos(\alpha - \beta/2)$$

##### 2) Le modèle de Klein

- Disque dont les droites sont les diamètres et les arcs de cercle interceptant deux points diamétralement opposés.
- Deux points diamétralement opposés sont à nouveau identifiés.



Une droite dans le modèle de Klein



Un triangle dans le modèle de Klein