printemps des sciences

Avec le soutien de la Ministre de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Sciences extrêmes **19 - 25 mars 2007**

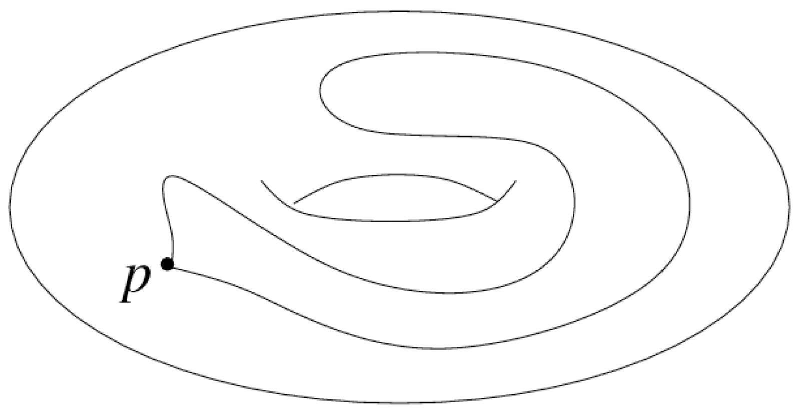
ULB

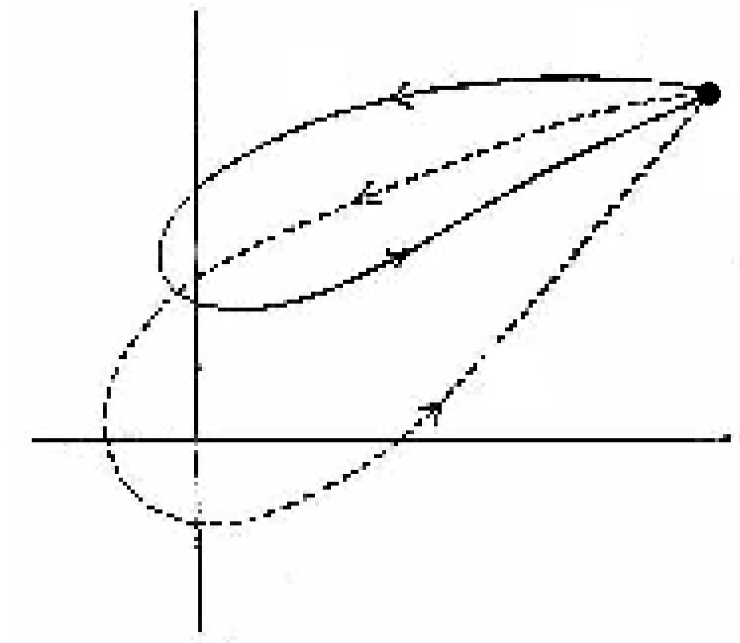
FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

LE GROUPE FONDAMENTAL

Lacets

Un lacet en un point x de l'espace X (variété topologique) est une application continue γ du segment $[0,1] \subset \mathbf{R}$ dans X telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$





exemples de lacets sur le tore et dans le plan

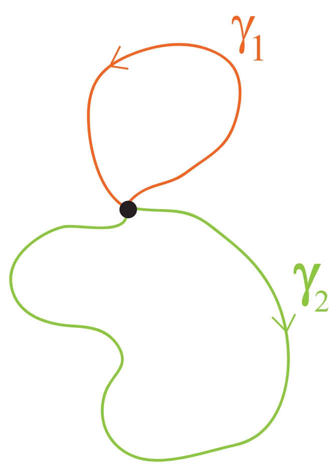
Lacets homotopes

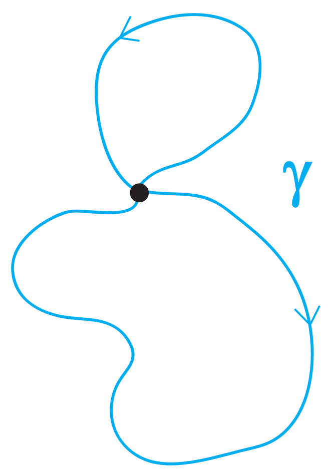
Deux lacets au point x de l'espace X sont dits homotopes si on peut les "déformer" continûment l'un dans l'autre. Plus précisément : une homotopie de lacets (entre γ_1 et γ_2) dans X est une application continue $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que $F(0,s) = F(1,s) = x$ et $F(t,0) = \gamma_1(t), F(t,1) = \gamma_2(t)$

Composition (produit) de lacets $\gamma_2 \circ \gamma_1$

Si $\gamma_1(s)$ et $\gamma_2(s)$ sont tels que
$\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2(1)$

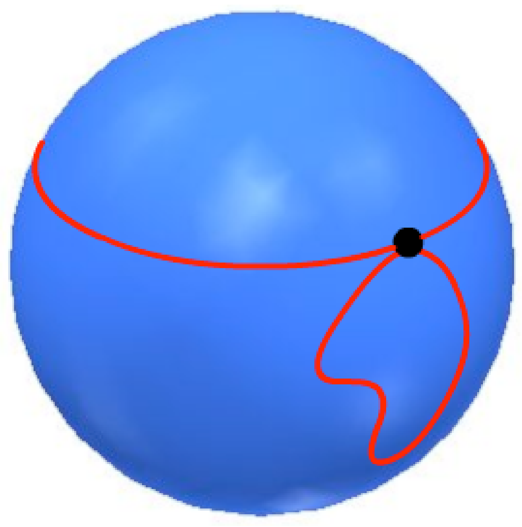
Alors $\gamma(s) = (\gamma_2 \circ \gamma_1)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$



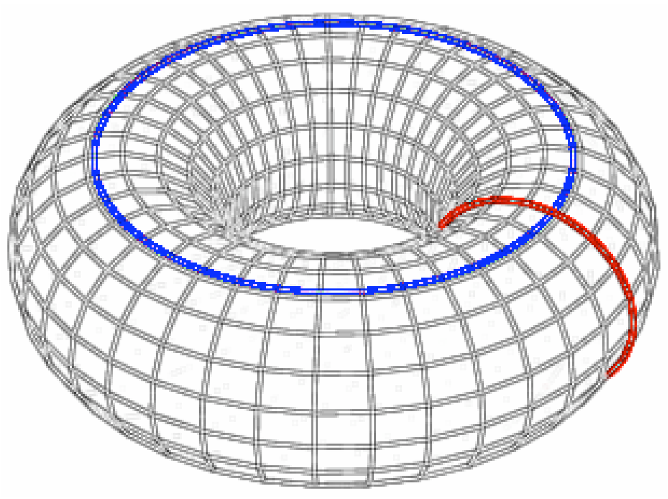


$\Pi_1(X)$ = { classes d'homotopie de lacets d'origine fixée (avec le produit) }

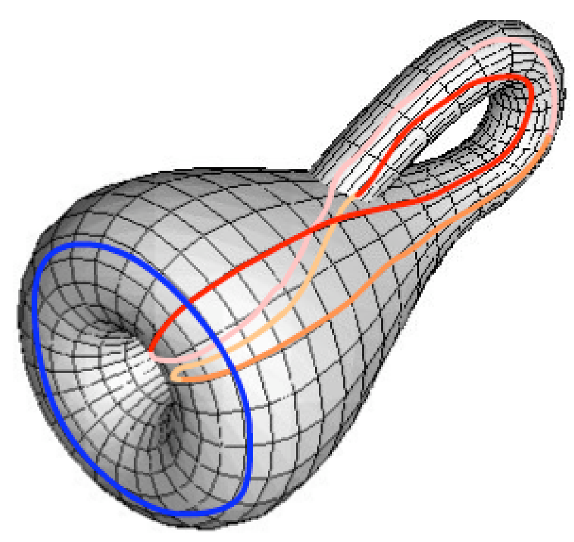
Exemples



Lacets homotopes sur la sphère.



Générateurs du Π_1 sur un tore ...



... et sur une bouteille de Klein

THÉORÈME

Deux espaces X_1, X_2 tels que $\Pi_1(X_1) \neq \Pi_1(X_2)$ ne sont pas déformables continûment l'un dans l'autre.
Attention : Deux espaces X_1, X_2 tels que $\Pi_1(X_1) = \Pi_1(X_2)$ ne sont pas nécessairement déformables l'un dans l'autre.

THÉORÈME

Deux surfaces S_1 et S_2 compactes connexes sont continûment déformables l'une dans l'autre si et seulement si $\Pi_1(S_1) = \Pi_1(S_2)$
La connaissance de Π_1(Surface) détermine cette surface