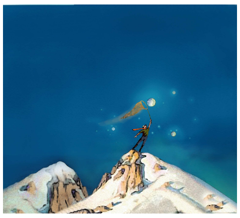


printemps des sciences

Avec le soutien de la Ministre de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Sciences extrêmes **19 - 25 mars 2007**

ULB

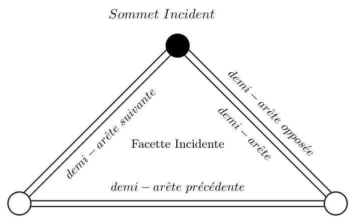
CORPS SOLIDE : REPRÉSENTATION ET MOUVEMENT

Julien Roland

Département d'Informatique

- Comment représenter un corps solide ?
- Comment mouvoir un corps solide ?
- Comment détecter une collision ?
- Comment répondre à une collision ?
- Comment appliquer cette théorie à un cas pratique ?

Représentation



Les corps solides sont typiquement représentés, comme le montre la figure ci-dessus, à l'aide de surfaces triangulaires. Cette figure montre la vision du monde d'une *demi-arête.*

Position et orientation

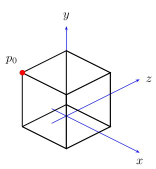


Figure 1: *body space*

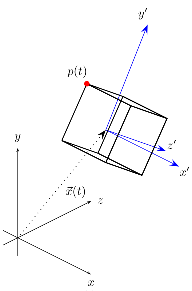


Figure 2: *world space*

La position $P(t)$ d'un point quelconque p_0 du corps solide au temps t peut être décrite par l'équation suivante

$$P(t) = x(t) + R(t)p_0.$$

Où x(t) représente le centre d'inertie au temps t, et R(t) la matrice de rotation qui donne l'orientation du solide.

Equation du mouvement

Le vecteur $X(t)$, qui permet de représenter l'état du solide :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{d}{dt}X(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Où x(t) donne la position, R(t) l'orientation, P(t) la quantité de mouvement, L(t) le moment cinétique, ω(t) la vitesse angulaire, τ(t) l'ensemble des moments de forces agissant sur le solide et F(t) l'ensemble des forces externes agissant sur le solide.

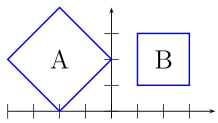
En connaissant la dérivée de $X(t)$ on peut donc calculer $X(t+\Delta t)$ à l'aide d'une méthode numérique de résolution d'équation différentielle ordinaire.

Détection des collisions

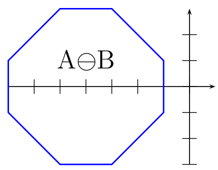
Pour détecter ces collisions on peut utiliser l'algorithme dit GJK (pour Gilbert-Johnson-Keerthi). Cet algorithme permet de calculer la distance entre deux objets convexes.

Voici un exemple d'exécution de l'algorithme en deux dimensions :

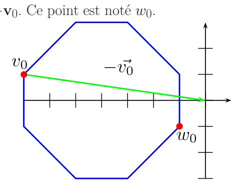
Dans cet exemple nous avons donc deux polygones convexes A et B.



Nous avons besoin de calculer $A \ominus B$, qui est la différence de Minkowski entre A et B, qui est définie comme suit $A \ominus B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$.

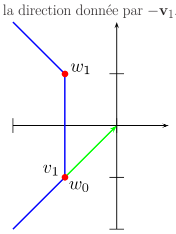


On choisit un point v_0 quelconque appartenant à $A \ominus B$. On va ajouter à un ensemble W le point le plus extrême dans la direction donnée par $-\mathbf{v}_0$. Ce point est noté w_0.

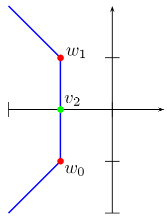


Pour trouver v_1 on va prendre le point le plus proche de l'origine appartenant au simplexe (enveloppe convexe d'un ensemble de points linéairement indépendants) formé à partir de l'ensemble W (par exemple le simplexe d'un point est un point, de deux points est un segment, de trois points est un triangle). v_1 est dans ce cas bien évidement égal à w_0.

On va donc comme précédemment chercher w_1 qui est le point le plus extrême dans la direction donnée par $-\mathbf{v}_1$.

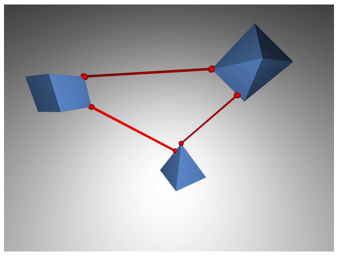


Finalement on trouve le point v_2 qui est le point le plus proche de l'origine dans l'ensemble des points décrit par le simplexe de W.



Nous avons donc une distance positive entre les deux objets A et B ce qui nous permet de conclure qu'il n'y a pas de collision entre ces deux objets.

A chaque temps t, comme le montre la figure ci-dessous, on connaît donc la distance minimale entre chaque paire d'objets. De plus par quelques manipulations, on peut obtenir les points les plus proches.



Dans cette figure les points les plus proches sont représentés par des sphères rouges, et reliés.

Gestion des collisions

Si une collision est détectée, c'est-à-dire si la distance entre A et B est négative ou nulle, on va pouvoir donner une réponse, et ce en ignorant les frottements.

Seules les réponses aux collisions de type sommet/face et arête/arête sont considérées. Les autres types de collisions peuvent être dérivées de ces deux types de collision ou sinon être considérées comme dégénérées (comme les collisions sommet/sommet par exemple).

Cette réponse aux collisions est calculée à l'aide d'un vecteur **J** appelé impulsion qui respecte une loi empirique de collision. Cette impulsion peut être vue comme une force infinitésimale agissant pendant un Δt qui tend vers 0. Cette impulsion va ainsi permettre de changer instantanément la vitesse.

La loi empirique de la collision nous dit que $v^+_{rel} = \epsilon v^+_{rel}$. Où v^-_{rel} est la vitesse relative, entre les deux points les plus proches, avant l'impulsion et v^+_{rel} la vitesse relative après l'impulsion et ϵ est appelé coefficient de restitution.

Une fois **J** calculé ont peut modifier la quantité de mouvement P et le moment cinétique L des corps solides A et B en collision. Une fois ces quantités calculées nous pouvons recalculer la vitesse linéaire et la vitesse angulaire de ces deux corps solides A et B, et poursuivre le mouvement.

FACULTE DES SCIENCES

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES