printemps des sciences

Sciences en tête 13 - 19 mars 2006

ULB

MATHEMATIQUES ET MUSIQUE

Isabelle Reis, Maud Vidick, Tom Goedert, Wei He
Département de mathématique

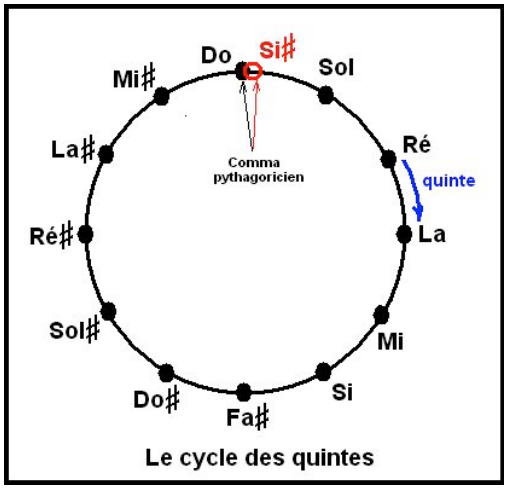
La gamme naturelle ou gamme pythagoricienne:

Pythagore (5ème ACN) construit la gamme naturelle (ou gamme pythagoricienne) à partir des quintes successives.
Prenons par exemple le do comme note de départ. Sa quinte est sol. En terme de fréquences,

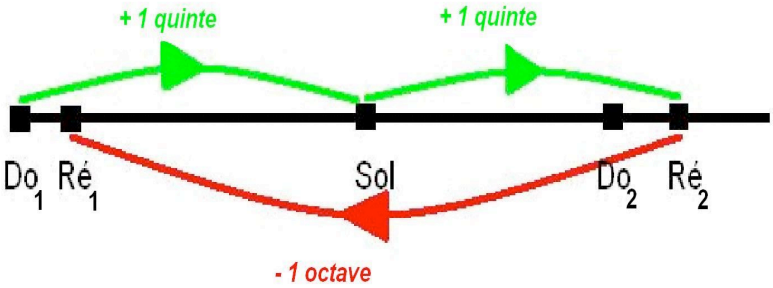
$$\text{fréquence}_{Sol} = \tfrac{3}{2}\cdot\text{fréquence}_{Do}$$

La quinte du sol est le ré.

$$\text{fréquence}_{ré} = \tfrac{3}{2}\cdot\text{fréquence}_{sol} = (\tfrac{3}{2})^2\cdot\text{fréquence}_{do}$$



Le cycle des quintes

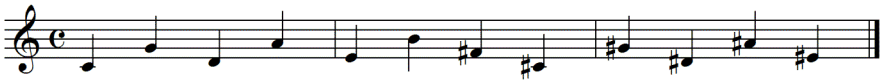


Pour ramener le ré dans la gamme de départ, il faut le diminuer d'une octave, c.à.d diviser sa fréquence par 2:

$$f_{ré_1} = \frac{1}{2}\cdot f_{ré_2} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{2})^2\cdot f_{do_1} = \frac{9}{8}\cdot f_{do_1}$$

et ainsi de suite...

Pythagore obtient 12 notes différentes comprises entre do_1 et do_2 .



Le problème de Pythagore:

On remarque sur le clavier que 12 quintes forment exactement 7 octaves. Leur rapport devrait être égal à 1. Or: $\dfrac{12 quintes}{7 octaves} = \dfrac{\frac{3}{2}^{12}}{2^7} \cong 1,0136$, ce terme d'erreur est appelé **comma pythagoricien**.

Autrement dit, les proportions des différents demi-tons ne sont pas conservées. En effet, par exemple:

$$\frac{f_{do\sharp}}{f_{do}} = \frac{(\frac{3}{2})^7\cdot(\frac{1}{2})^4}{1} \cong 1,0679 \quad (1) \qquad \text{or} \qquad \frac{f_{ré}}{f_{do\sharp}} = \frac{\frac{9}{8}}{(\frac{3}{2})^7\cdot(\frac{1}{2})^4} \cong 1,0535 \quad (2)$$

Vérifions, $\dfrac{(1)}{(2)} \cong \dfrac{1,0679}{1,0535} \cong 0,0136$, qui est bien égal à 1 comma.

Ceci rend la **transposition** impossible (la transposition consiste à écrire la gamme en partant d'une note différente du do).

© Toute reproduction, même partielle, doit indiquer clairement le nom de tous les auteurs, le nom du Service/Département, ainsi que la mention « printemps des sciences 2006 - Bruxelles»

FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES