FACULTE DES SCIENCES
UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

printemps des sciences

Sciences en tête 13 - 19 mars 2006

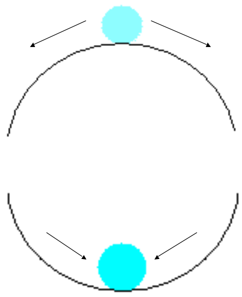
ULB

La Stabilité

R. Coché, J. De Boeck, L. La Fuente-Gravy, C. Pauwels, A. Toussé
Département de Mathématique

Si une bille est posée en équilibre sur une surface convexe et qu'on l'écarte légèrement de sa position, elle tombe. C'est un **équilibre instable**.

Si par contre cette bille est posée en équilibre sur une surface concave et qu'on l'écarte légèrement de sa position, elle oscillera autour de cette position d'équilibre. C'est un **équilibre stable**.



Équation de Verhulst :

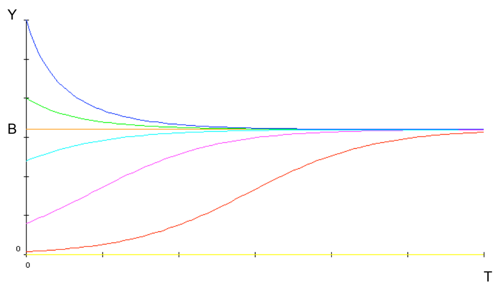
Une application mathématique du concept de stabilité est **l'équation de Verhulst**.

L'observation de l'évolution d'une population nous amène à étudier des équations différentielles du type :

$$\frac{dy}{dt} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)y \qquad a \geq 0, b \geq 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$y(t) = \frac{by_0}{y_0 + (b - y_0)e^{-at}}$$



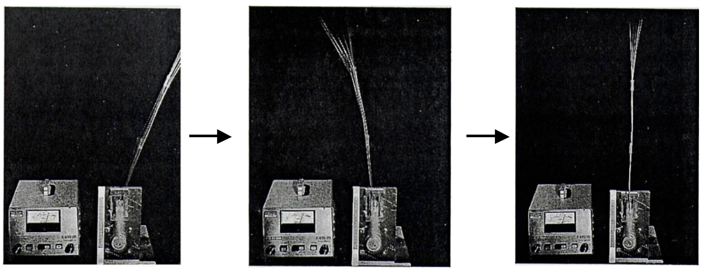
En prenant y_0 = b, la solution y(t) = b est stable car en perturbant légèrement y_0, y(t) tend toujours bien vers b.

$$\begin{cases} y_0 = b \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

Par contre si on prend y_0 = 0, la solution y(t) = 0 n'est plus stable car en modifiant légèrement y_0, y(t) ne tend plus vers 0.

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

Pendule inversé :



©Nature

Ce pendule triple inversé, grâce à des **oscillation verticales**, possède une nouvelle position de stabilité vers le haut. En l'écartant de cette position, il oscillera autour de ce point d'équilibre.