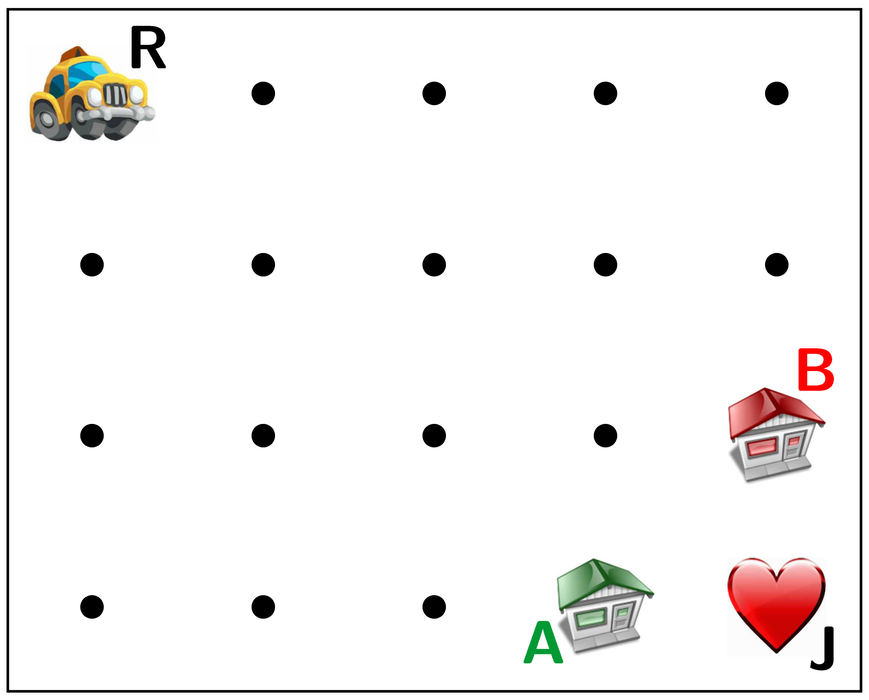
Nombre de taxichemins entre 2 points

1ère approche : le triangle de Pascal

• Dans une "ville" $m \times n$, Roméo souhaite rejoindre Juliette le plus vite possible. Combien de taxichemins peut-il emprunter pour ce faire ?

• On observe que :

$$\sharp\text{tc menant à Juliette} = \sharp\text{tc menant à A} + \sharp\text{tc menant à B}$$



1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

• Le nombre de chemins menant à un point P est donc la somme des nombres de chemins menant aux 2 points qui côtoient P :

$$\sharp tc(m,n) = \sharp tc(m-1,n) + \sharp tc(m,n-1).$$

• Ces nombres forment le triangle de PASCAL.

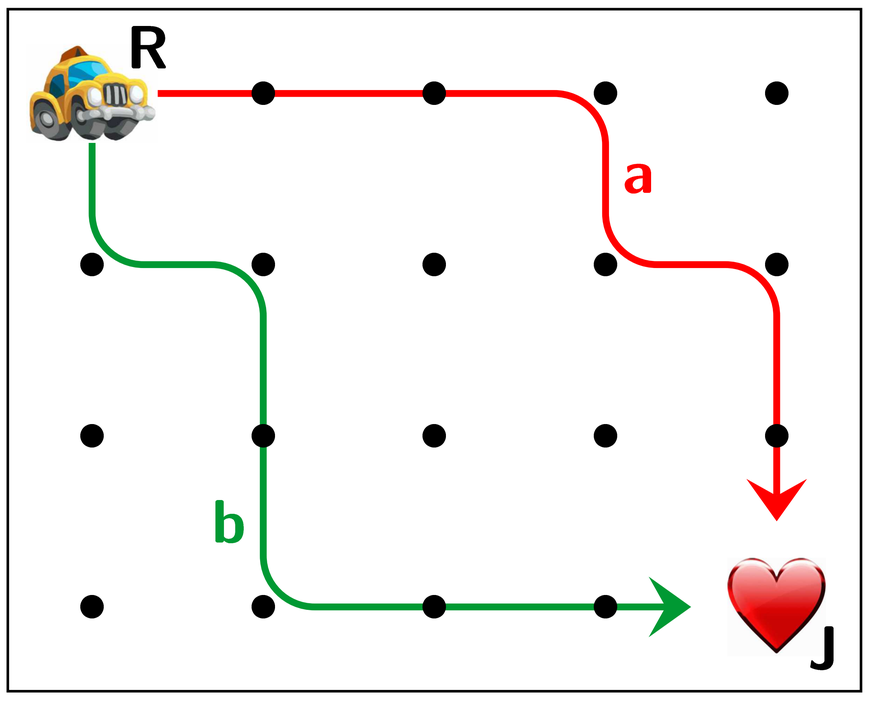
2e approche : le coefficient binomial

• Tout taxichemin reliant Roméo à Juliette peut être écrit comme un "mot" de $m+n$ lettres, avec m lettres V (déplacements verticaux) et n lettres H (déplacements horizontaux).

• Le nombre de ces taxichemins vaut donc le nombre de manières de choisir m places pour V parmi les $m+n$ lettres du mot :

$$\sharp\text{chemins menant à Juliette} = \binom{m+n}{m}$$

où $\binom{p}{q} = \mathrm{C}_p^q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ est le **coefficient binomial**.



a : H-H-H-V-H-V-V
b : V-H-V-V-H-H-H