Faculté des Sciences

Printemps des Sciences 2004

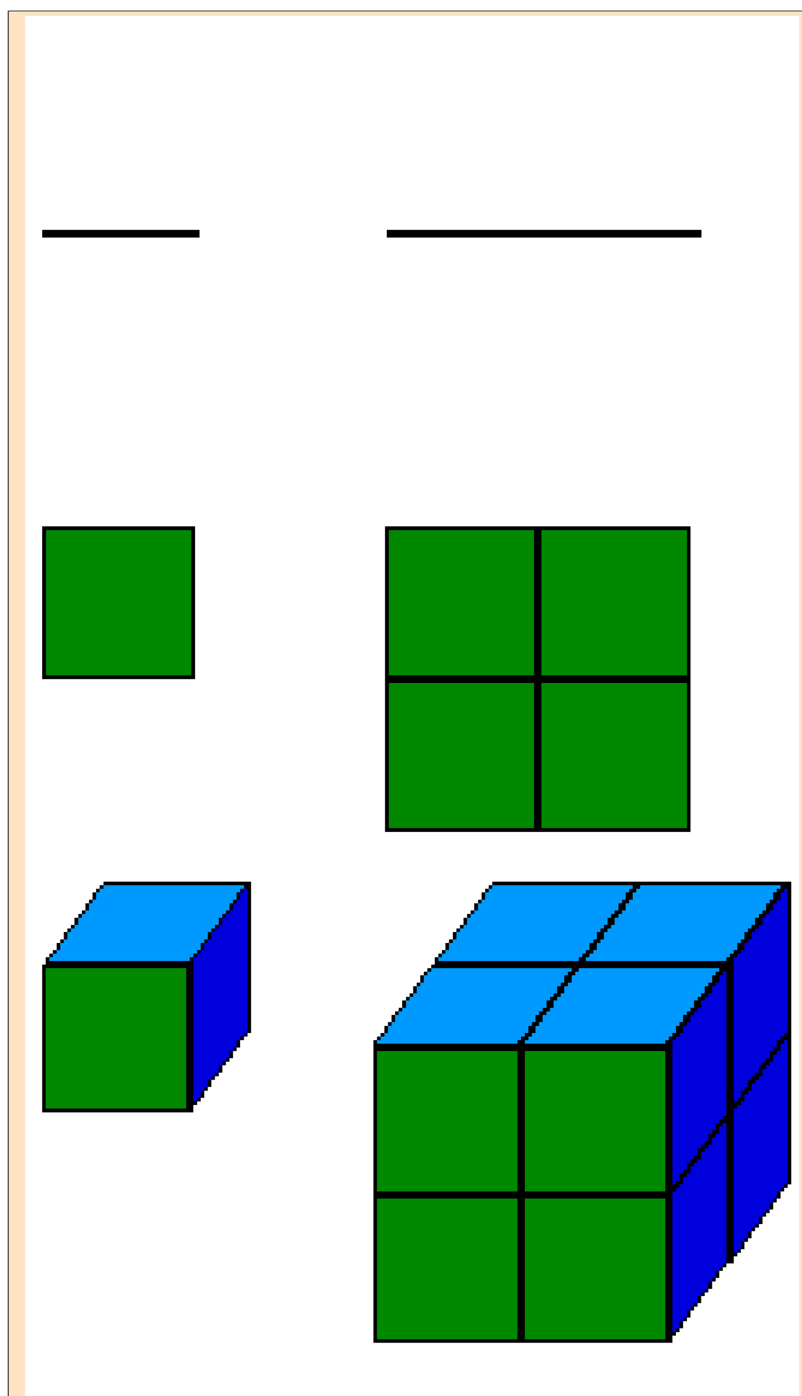
Mesure de la dimension fractale

Conseillers : Pasquale Nardone
Dimitri Ivanov et le service de physique des polymères

Département de Physique

La masse d'un objet varie avec sa taille (à densité constante)

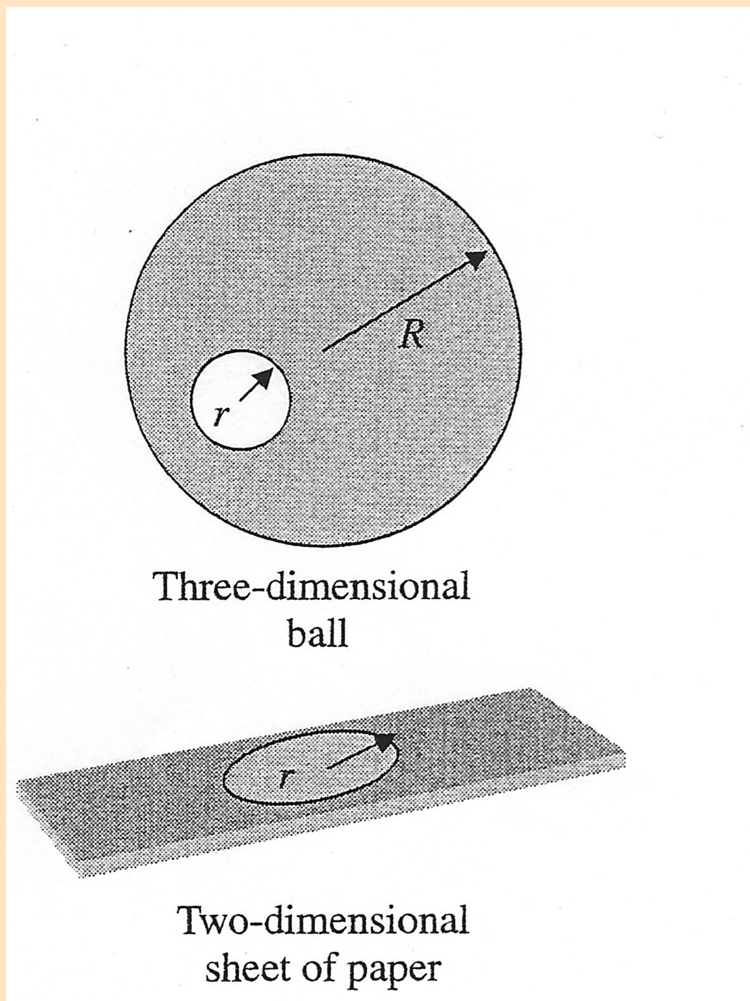
Observation de la variation de la masse selon la taille pour des objets géométriques simples :



Si on double la taille, la masse est doublée
$m = k \cdot L^{\mathbf{1}}$

Si on double la taille, la masse est quadruplée
$m = k \cdot L^{\mathbf{2}}$

Si on double la taille, la masse est multipliée par 8
$m = k \cdot L^{\mathbf{3}}$

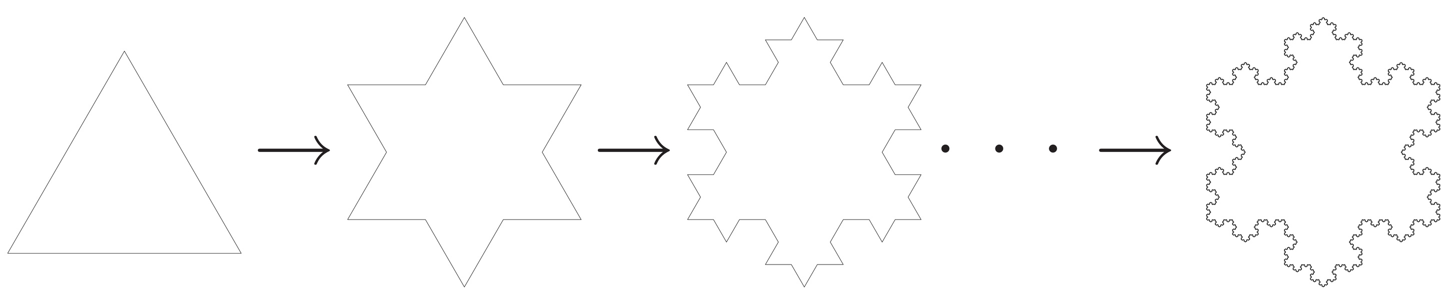


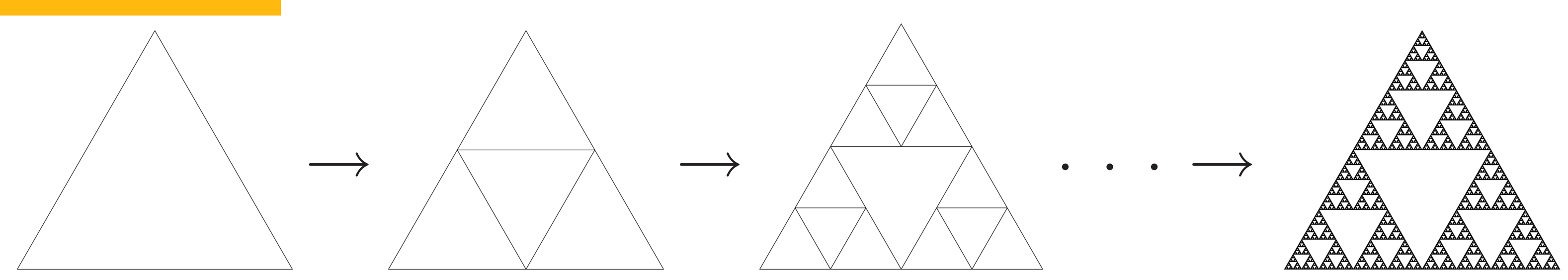
Dans le cas d'une sphère, le volume V est proportionnel au cube du rayon et à sa masse m :

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \approx r^{\mathbf{3}} \sim m$$

Pour un objet à deux dimensions comme la feuille de papier de densité uniformes, la masse m du cercle que l'on peut découper dans cette feuille est proportionnelle au carré du rayon r de ce cercle : $m \sim r^{\mathbf{2}}$.

$$\mathbf{m(r) = k \cdot r^{d}}$$





Courbe de Koch

Calcul de la dimension : $m \simeq r^{\mathbf{d}}$

$r_1 = 3 \cdot r_2$ tandis que $m_1 = 4 \cdot m_2$

$$m_1 \simeq r_1^d = (3r_2)^2$$
$$m_1 = 4m_2 \simeq 4r_2^d$$
$$(3r_2)^d = 4r_2^d$$
$$\Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \mathbf{1,26}$$

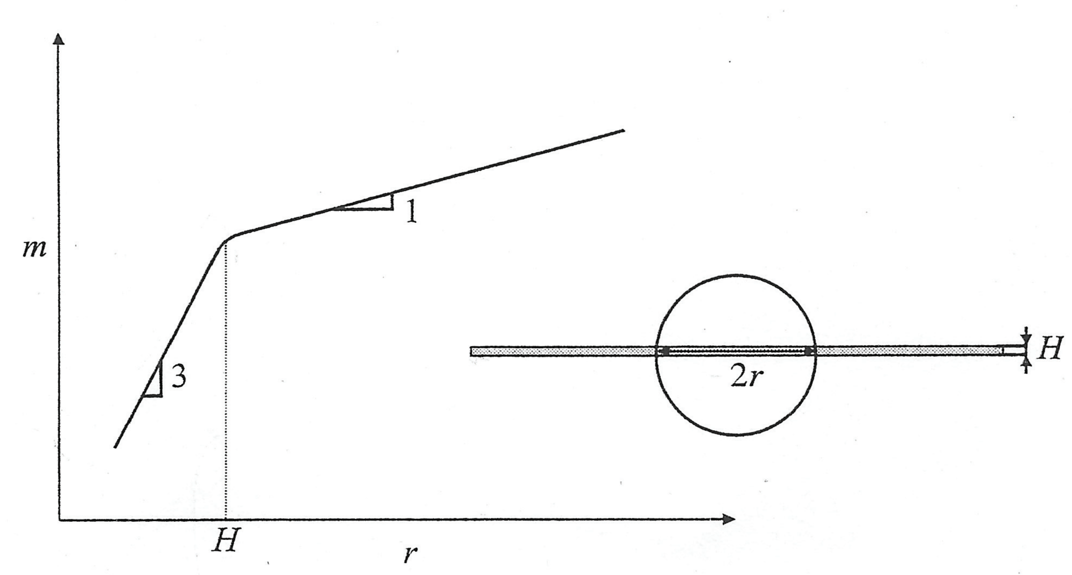
Triangle de Sierpinski

Calcul de la dimension : $m \simeq r^{\mathbf{d}}$

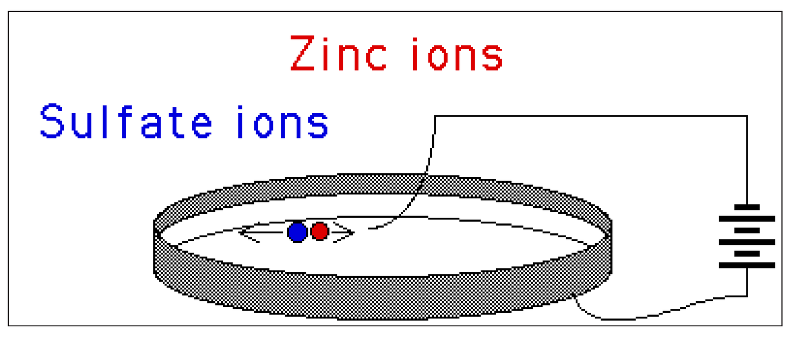
$r_1 = 2 \cdot r_2$ tandis que $m_1 = 3 \cdot m_2$

$$m_1 \simeq r_1^d = (2r_2)^2$$
$$m_1 = 4m_2 \simeq 3r_2^d$$
$$(2r_2)^d = 3r_2^d$$
$$\Rightarrow d = \frac{\log 3}{\log 2} \cong \mathbf{1,58}$$

La dimension fractale d'un objet physique dépend de la distance à laquelle on le regarde (limite de validité).



Expérience : électrolyse de $ZnSO_4$



L'équation de l'électrolyse est la suivante :

$$Zn^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Zn(s)$$

Le courant passant dans le circuit vaut :

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

On obtient la charge totale qui est passée dans le circuit :

$$Q(t) = \int I(t)\mathrm{d}t$$

Le nombre de moles d'électrons correspondant à cette charge est :

$$n_e = \frac{Q}{F}$$

ou encore :

$$n_e = \int \frac{I(t)}{F}\,\mathrm{d}t$$

Le nombre de moles de Zn^{2+} est égal à la moitié du nombre d'électrons consommés lors de la réaction :

$$n_{Zn(s)} = n_{Zn^{++}} = \frac{m_{Zn(s)}}{M_{Zn}}$$

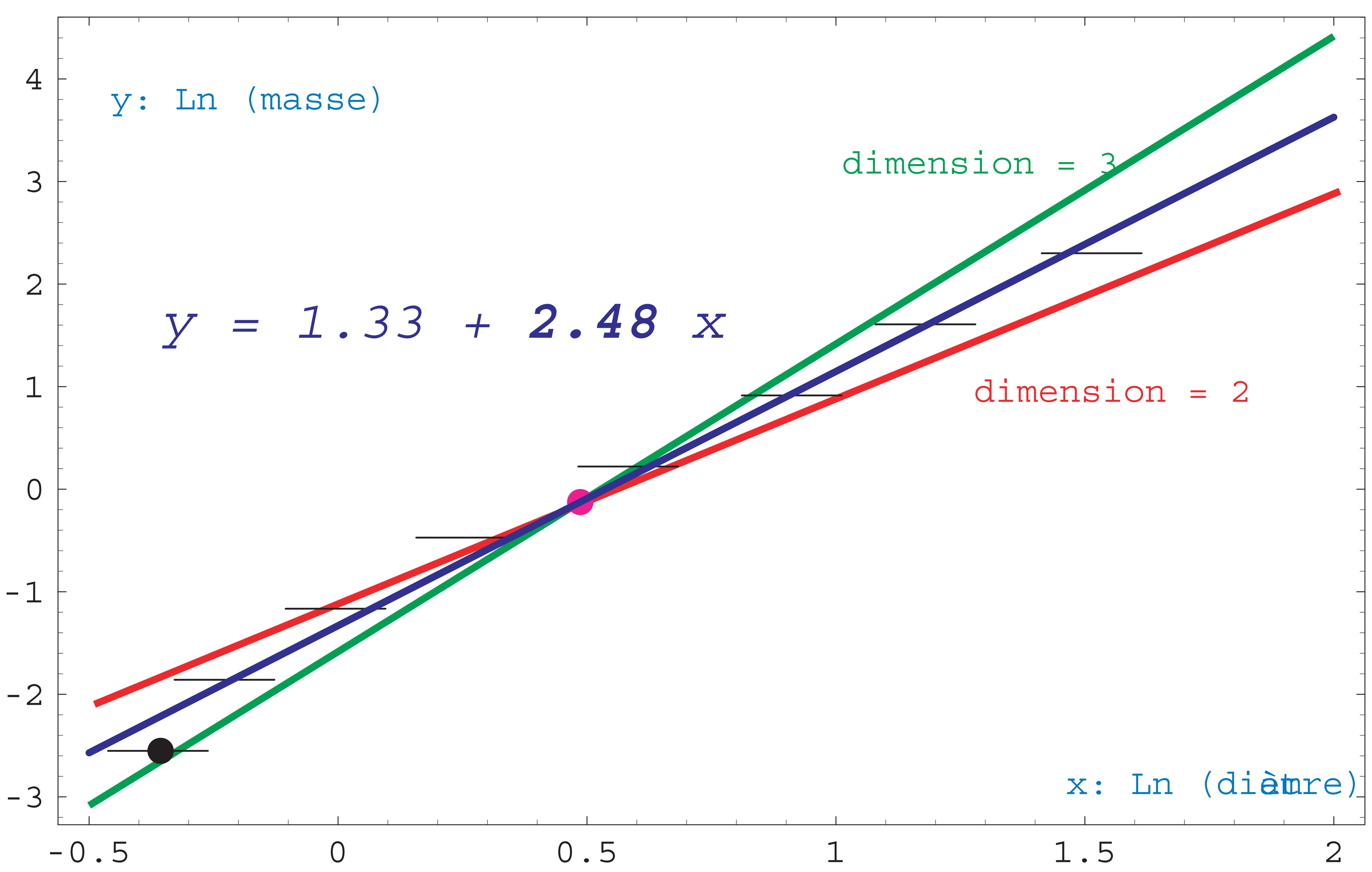
Relation liant la masse de $Zn(s)$ au nombre d'électrons :

$$m_{Zn(s)} = \frac{n_e}{2}\cdot M_{Zn} \Rightarrow [m = k \cdot D^d] \Rightarrow \boxed{d}$$

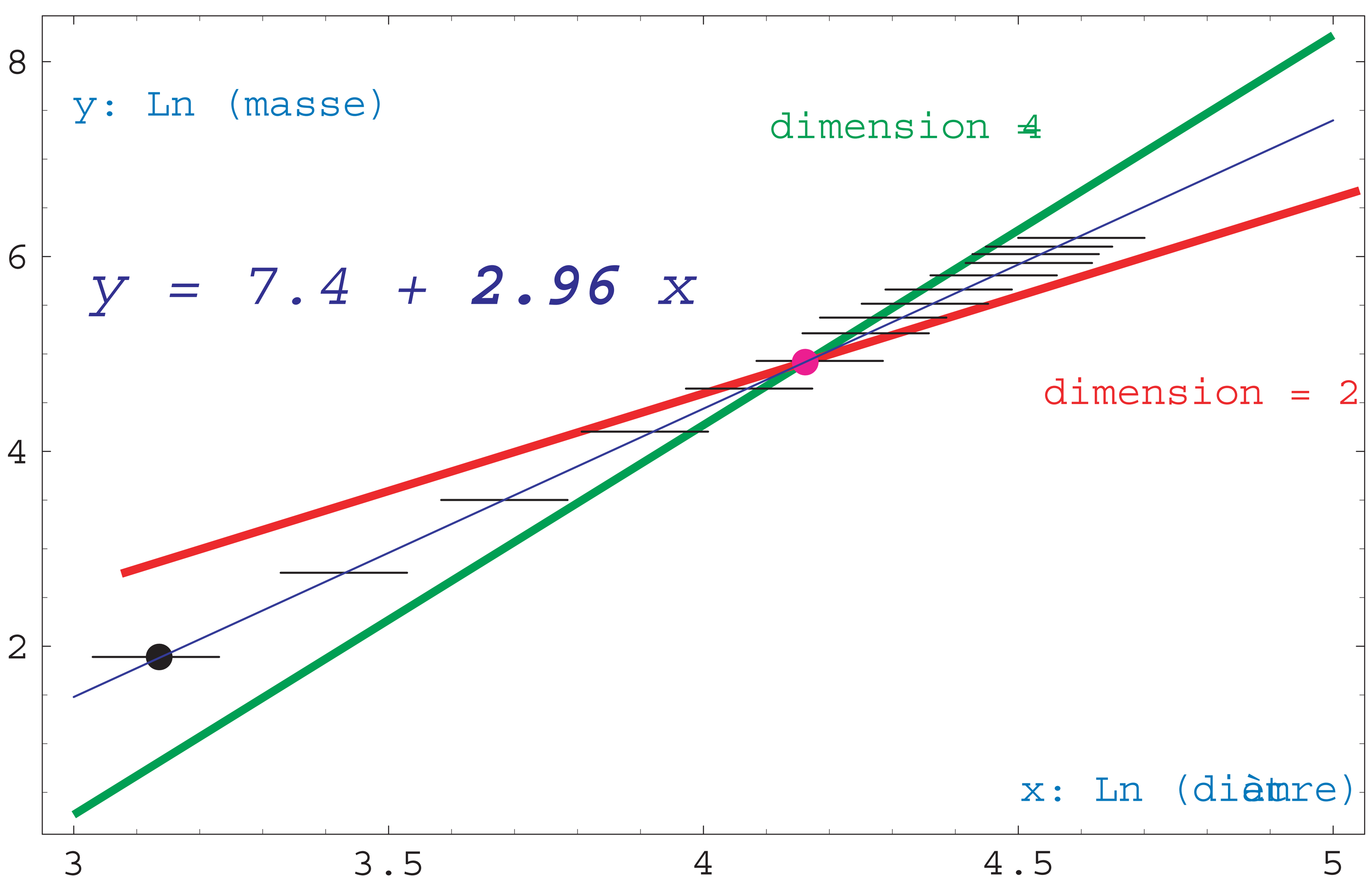
où : D = diamètre de l'objet
d = sa dimension fractale.

Expérience : mesure de la dimension fractale des boulettes de papier

Dimension des boulettes de papier



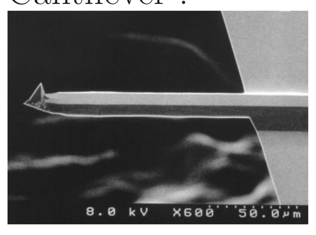
Dimension des sacs de haricots



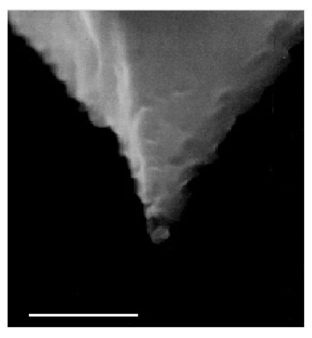
Le processus de création des boulettes de papier génère des plis sur une large gamme d'échelles, ce qui est une caractéristique des fractales.
En comparaison, les sacs sont composés de haricots de taille uniforme qui laissent entre eux des espaces de taille constante.
Des interstices de taille constante n'affectent pas la dimension, mais ils diminuent la densité moyenne.

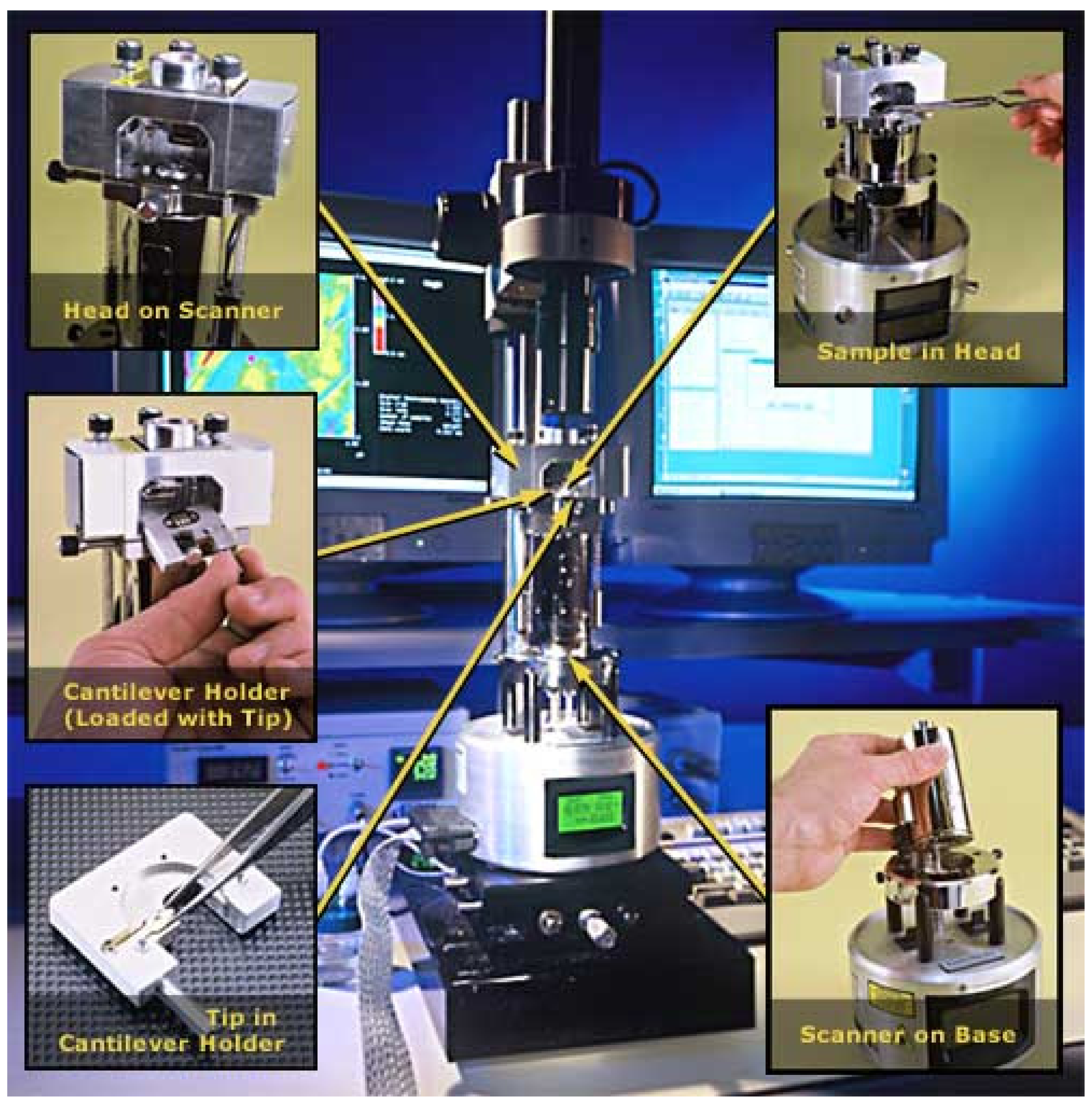
AFM - Description et fonctionnement

Cantilever :



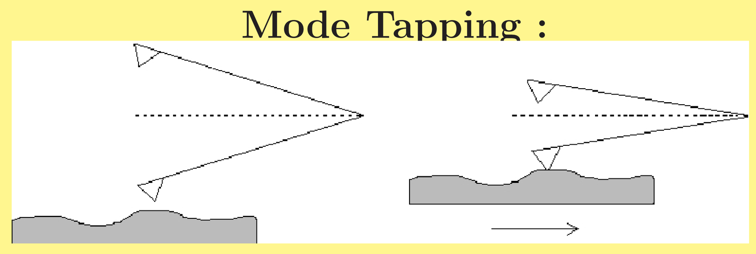
Pointe :





On relève la topographie de la surface de l'échantillon par l'intermédiaire de la variation de la hauteur (Δz) nécessaire pour maintenir l'amplitude des oscillations ($A(z)$) constante.

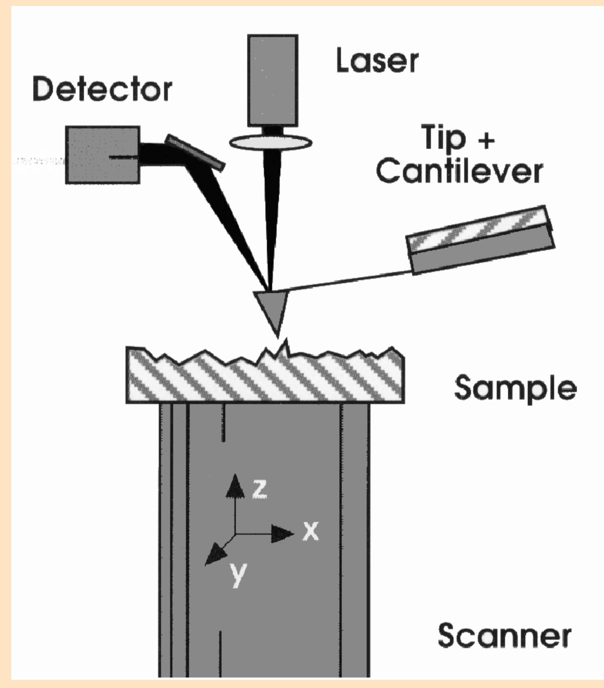
Mode Tapping :



Le microscope à force atomique (AFM) permet d'analyser les surfaces à des échelles réduites dans le but de déterminer la structure de l'échantillon ainsi que d' analyser la rugosité de la surface. L'avantage de l'AFM par rapport à d'autres microscopes à champ proche tels que le microscope à effet tunnel est qu'il présente la possibilité d'analyser tous les types de surfaces et pas seulement les surfaces conductrices.

Système optique :

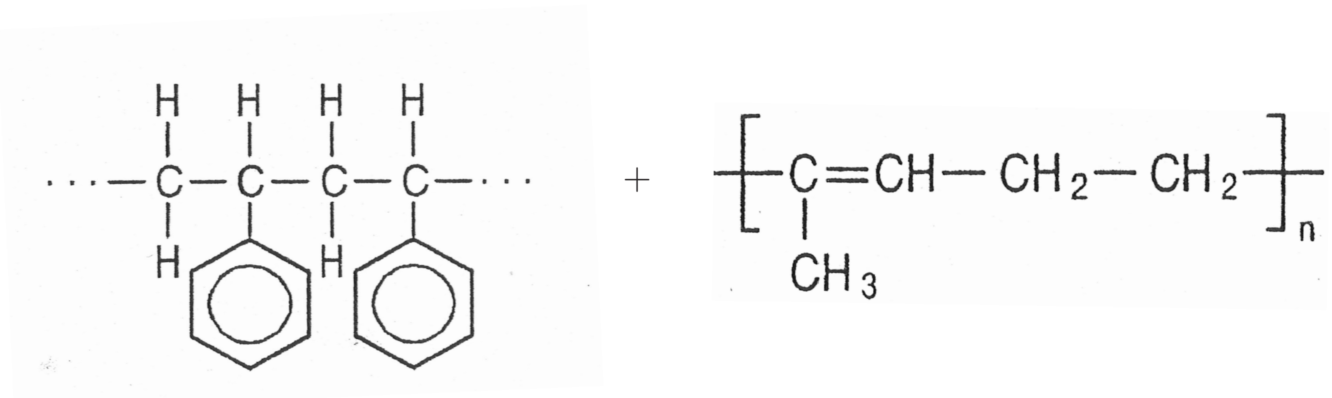
Le système optique inclut un laser qui envoit le faisceau sur l'extrémité du levier et sur une photodiode à quatre segments. Il permet de relever avec précision la variation de l'amplitude d'oscillation et la flexion statique du levier.



Description des objets étudiés

Micelles en copolymères à blocs

PS PI



Une micelle est obtenue en reliant deux chaînes polymères différentes [ici, le polystyrène (PS) et le polyisopropène (PI)]. Cette réaction aboutit à la formation d'un *copolymère* à bloc. Par la suite, le copolymère est mis en présence d'un solvant qui force le polystyrène à se replier sur lui-même (mauvais solvant pour le PS) et à former un long cylindre autour duquel se placent les molécules de PI qui absorbent les molécules du solvant (bon solvant pour le PI).

Surface de polystyrène (PS)

La surface de polystyrène est obtenue en déposant une fine goutte d'une solution de polystyrène dans un solvant (ici, du toluène). La surface est obtenue par *spin-coating* : cette méthode consiste à faire tourner la plaque à environ 20000 tours/minute, ce qui provoque l'étalement de la goutte et l'éjection du solvant. On obtient alors une fine couche de polystyrène, qui est uniforme sur plusieurs centimètres carrés

Aspects théoriques

Facteur de structure :

Les objets décrits ci-dessus ont été analysé en calculant le facteur de structure défini comme :

$$S(\vec{q}) = \frac{\Sigma \exp \imath\vec{q}\cdot\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{N_m} \qquad (1)$$

ou $\vec{q}$: vecteur de l'espace réciproque à deux dimensions pour des images AFM. Pourt un objet fractal, l'expression du facteur de structure se réduit à la forme :

$$S(\vec{q}) \approx (qb)^{-d}$$

La dimension fractale d'une surface est déterminée à-partir de la fonction de corrélation hauteur-hauteur :

$$C(R) = 2\sigma^2 \exp\left[-\left(\frac{R}{\xi}\right)^{2\alpha}\right] \qquad (2)$$

– La rugosité RMS : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma\left(z_i - \bar{z}\right)^2}$

– La portée de corrélation ξ : donne une estimation de la distance sur laquelle la surface se comporte comme un objet fractal.

– La constante de *Hurst* α.

Cette dernière est reliée à la dimension fractale de la surface par la relation :

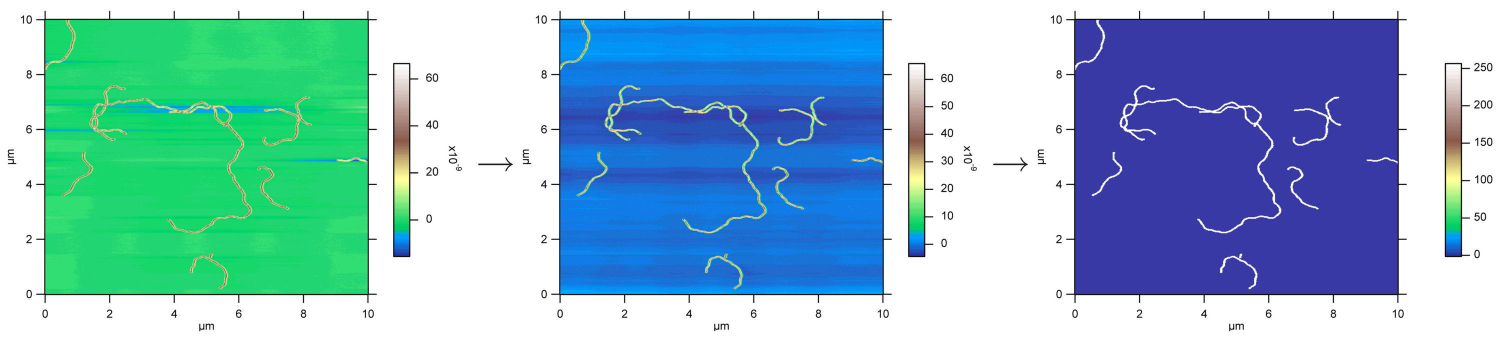
$$\alpha = 3 - d \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \text{Dans le cas d'une surface \textbf{régulière}, } \alpha = \mathbf{1} \text{ et } d = 2. \\ \text{Dans le cas d'une surface \textbf{aléatoire}, on a } \alpha = \mathbf{0,5} \text{ et } d = 2,5. \end{cases}$$

Images obtenues avec l'AFM

Micelles en copolymères à blocs

L'image de gauche est l'image brute obtenue par l'AFM. La première étape du traîtement consiste à l'*aplatir*, c'est-à-dire approximer la surface de base par un polynôme, puis soustraire ce dernier à la surface, ce qui permet alors de s'assurer que la surface de base est *aplatie*.

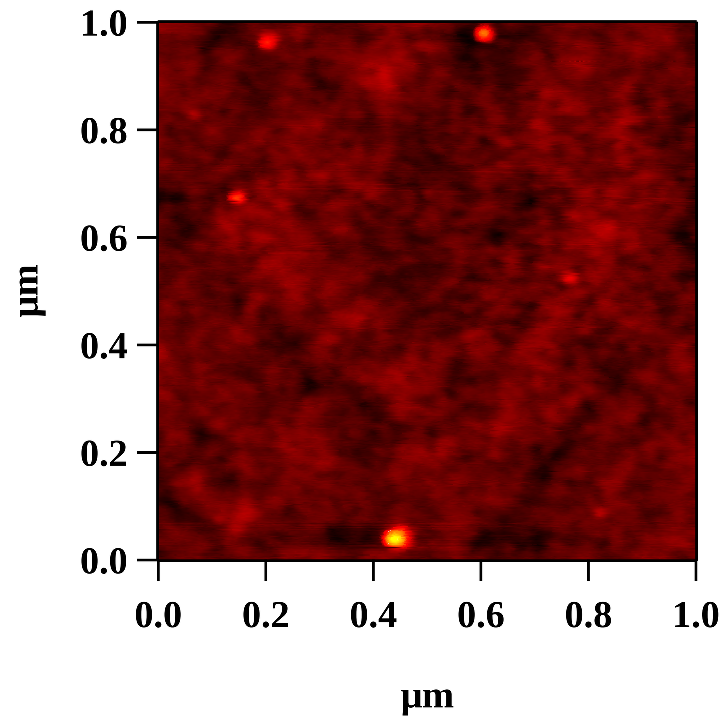


On va ensuite binariser l'image, c'est à dire remplacer tous les points dont la hauteur est supérieure à un certain seuil par 1 et tous ceux dont la hauteur est inférieure à celle-ci par 0 (background).

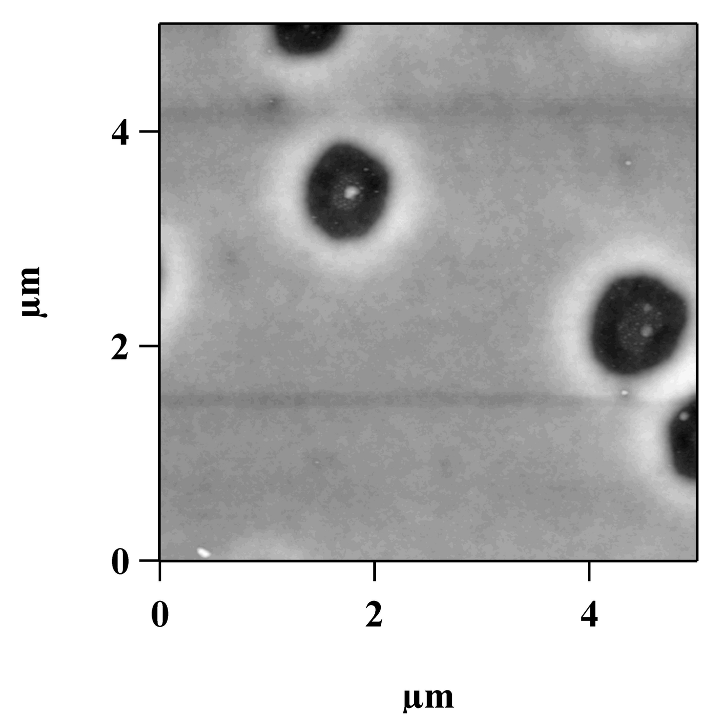
Surface de polystyrène (PS)

Deux cas extrêmes :

Surface d'un film épais

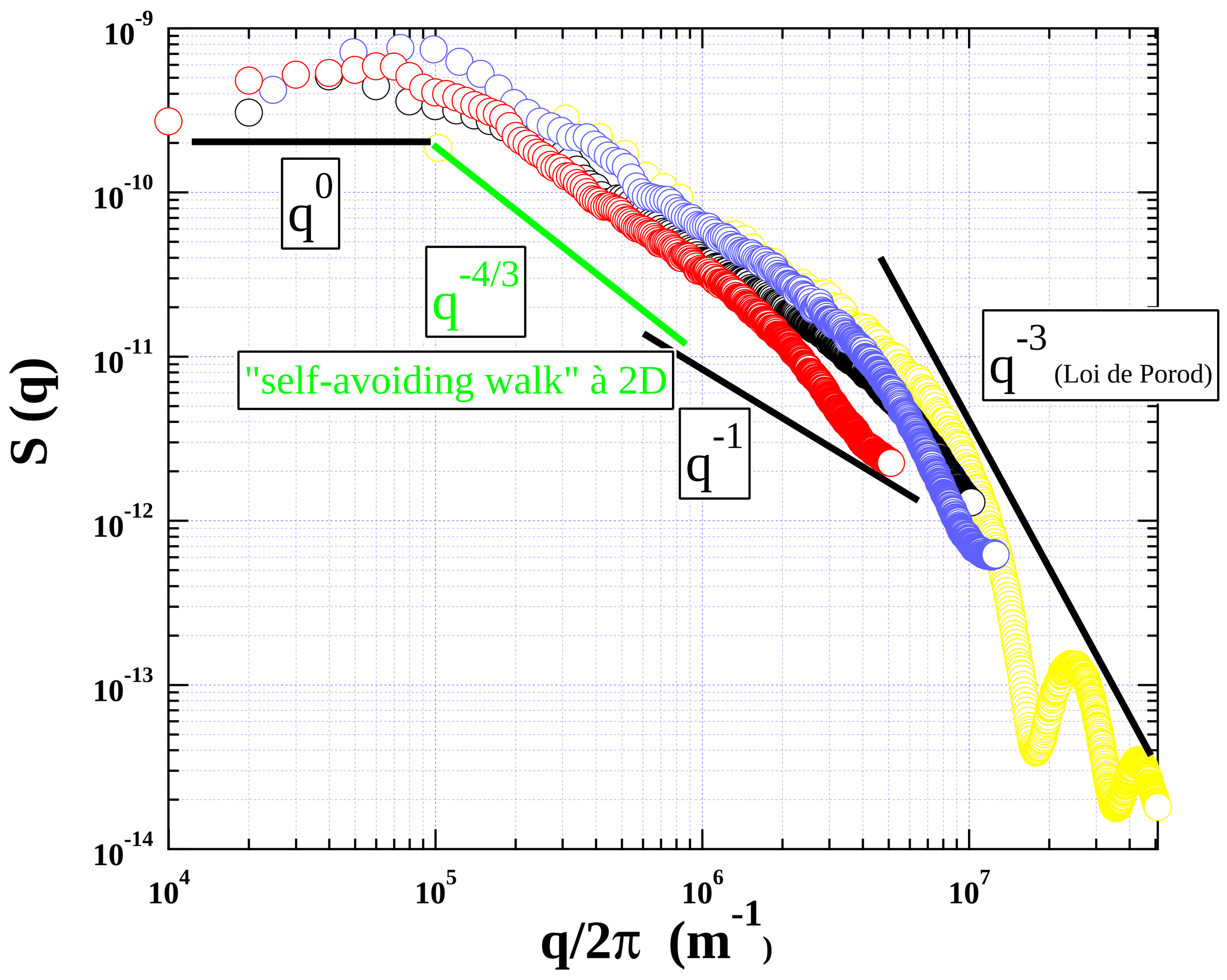


Surface d'un film mince partiellement démouillé

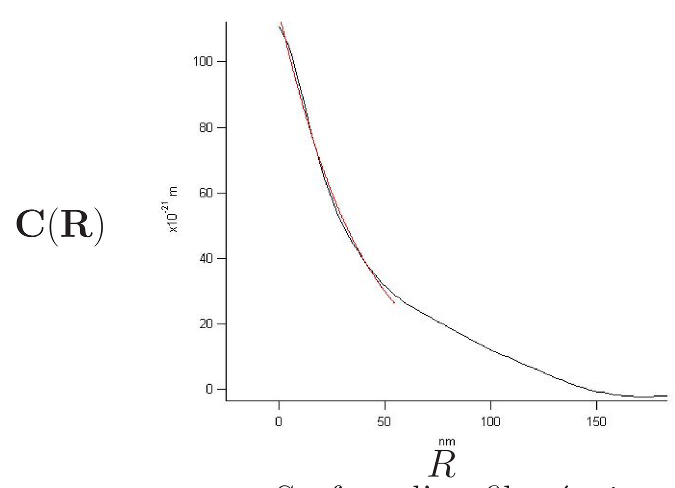


Traîtement des images

Calcul du facteur de structure pour les micelles

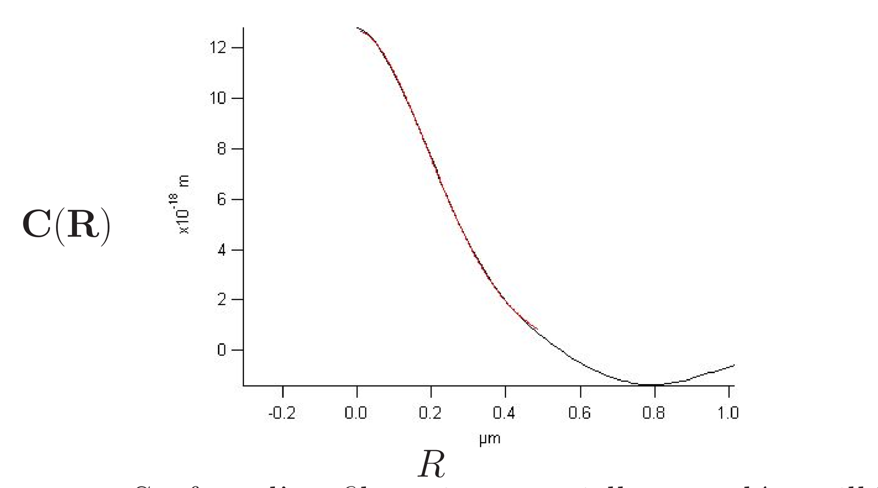


Fonction de corrélation hauteur-hauteur



Surface d'un film épais

σ (m)	$2.39 \cdot 10^{-10}$
ξ (m)	$3.78 \cdot 10^{-8}$
α	0.53

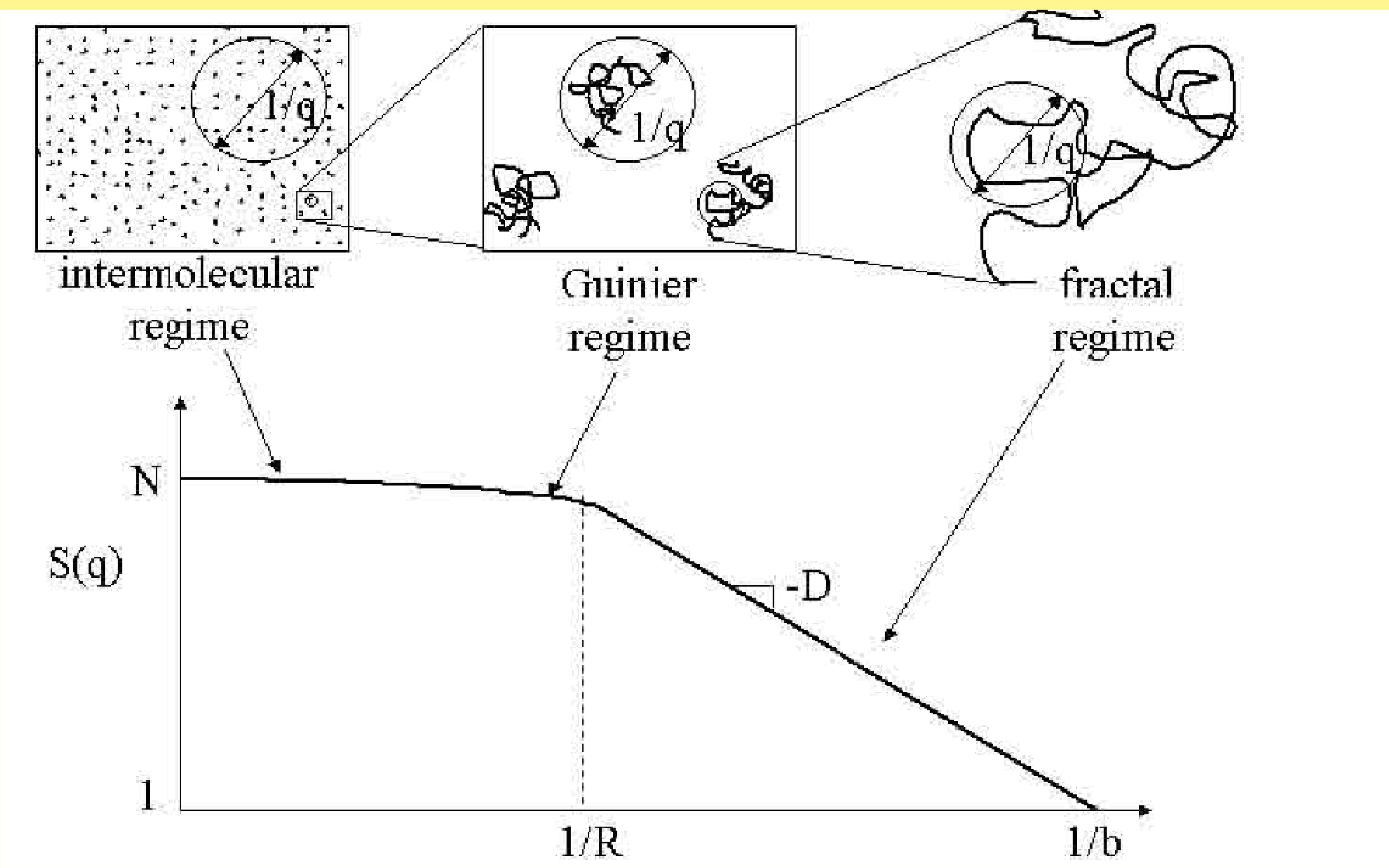


Surface d'un film mince partiellement démouillé

σ (m)	$2.52 \cdot 10^{-9}$
ξ (m)	$2.86 \cdot 10^{-7}$
α	0.94

Conclusions

Nous pouvons comparer le graphique obtenu ci-dessus avec la courbe théorique suivante, montrant le comportement dimensionnel du polymère pour différentes échelles :



La région qui nous intéresse est celle pour laquelle la norme du vecteur $\|\vec{q}\|$ prend des valeurs $\in [1/R, 1/b]$. Dans cet intervalle, l'expression du facteur de structure se réduit à la forme

$$S(q) \approx (qb)^{-d}$$

où d représente la dimension fractale.

Si on approxime sur le graphique expérimental la même région par une droite et qu'on calcule son coéfficient angulaire, on obtient la dimension fractale de la micelle qui est de **4/3** (self-avoiding walk à deux dimensions).

Surface d'un film épais

Dans ce cas, la constante de Hurst vaut environ 0,53, ce qui signifie que la dimension fractale de notre surface est située entre celle d'une *surface régulière* et celle d'une *surface aléatoire*, bien qu'il y ait un plus petit écart ($\simeq 0,03$) par rapport à cette dernière. La rugosité a une valeur plus faible que dans le cas d'une surface d'un film mince, ce qui s'explique par le fait que la fonction de corrélation hauteur-hauteur n'est plus saturée par la profondeur des trous. On voit que dans le cas d'un film mince, ξ représente la taille latérale des trous.

Surface d'un film mince partiellement démouillé

Nous avons un phénomène de *démouillage* qui consiste en la modification d'un film déposé sur un substrat : le film se contracte en formant des gouttes macroscopiques (la formation de gouttes permettant au film de diminuer son énergie libre), le début du processus étant caractérisé par la formation de trous. Les trous présents sur la surface domine alors la fonction de corrélation. On obtient une constante de Hurst égale à environ 1, ce qui correspond à la dimension d'une surface régulière [la surface à l'intérieur des trous (substrat) étant plate].

ULB