

Le Rayonnement du corps noir

— Résumé

Dans le cadre du thème du printemps des sciences 2002, à savoir l'énergie sous toutes ses formes, nous vous proposons de retracer l'évolution du problème du corps noir dont l'issue fut à la base de la célèbre mécanique quantique, un des piliers de la physique moderne.

En effet, certains résultats expérimentaux ne pouvaient pas être expliqués sans l'introduction d'une nouvelle constante universelle, la fameuse constante de Planck.

Mais qu'est-ce qu'un corps noir? On le définit comme étant un corps ayant un coefficient d'absorption énergétique valant rigoureusement un.

Avant les résultats de Planck, toute une série de lois étaient acceptées tant théoriquement qu'expérimentalement. Pour n'en citer que quelques unes:

la loi de Kirchhoff, qui disait qu'à l'équilibre du corps noir (équilibre que nous définirons pendant l'exposition), son rayonnement ne dépendait que de la température; la loi de Stefan-Boltzmann qui donnait la dépendance de la densité d'énergie du rayonnement (que nous définirons aussi à l'exposé) en la température ainsi que la loi de Wien qui permettait d'expliquer le déplacement, lors d'une augmentation de la température, de la longueur d'onde du maximum d'intensité d'émission spectrale...

Avec la loi de Rayleigh-Jeans, qui tentait de donner une expression de la distribution en fréquence de la densité d'énergie totale rayonnée par le corps noir, se posaient deux problèmes : elle n'expliquait pas la courbe isotherme du corps noir obtenue expérimentalement pour des petites longueurs d'ondes et conduisait à une densité d'énergie infinie.

Par contre, Planck et son hypothèse des quanta d'énergie permettront d'expliquer ces incohérences.

Tout ceci sera approfondi lors de l'exposé et une petite démonstration expérimentale, utilisant un four pouvant constituer une bonne approximation d'un corps noir, viendra appuyer toutes ces explications, donc venez nombreux.

— Introduction

En 1864, la théorie de l'Electromagnétisme de Maxwell unifie les disciplines Electricité, Magnétisme et Rayonnement (jusqu' alors distinctes). En y ajoutant la Mécanique de Newton et la Thermodynamique on pense alors pouvoir expliquer la quasi totalité des phénomènes physiques. Pourtant, vers la fin du **XIX**^o siècle certains faits expérimentaux se révèlent être inexplicables par la Physique Classique. Ainsi, l'expérience de l'effet photoélectrique réalisée en 1887 par Hertz est incompatible avec une description ondulatoire de la lumière, alors que cette nature ondulatoire est reconnue dès 1802 (expérience de Young) et confirmée par l'Electromagnétisme. Par ailleurs, les débuts de la spectroscopie révèlent pour les atomes des émissions et absorptions d'énergie sous forme discontinue, ce que l'on ne sait expliquer. Parmi toutes ces incohérences, on retrouve le fameux problème du Rayonnement du Corps Noir. Nous commencerons par aborder quelques propriétés du rayonnement (électromagnétique) et par définir quelques grandeurs qui nous seront utiles par la suite. Nous essaierons alors d'aborder le problème tel qu'il s'est posé à l'époque et suivrons son évolution jusqu' à sa résolution par Max Planck en 1900. Enfin, nous donnerons quelques exemples et applications et décrirons les expériences réalisées au Printemps des Sciences.

```
[ > plotsetup(ps,plotoptions=`colour=rgb`);
```

Les différents processus de transfert de la chaleur

Le premier principe de la Thermodynamique établit une équivalence entre travail et chaleur comme modes de transfert d'énergie entre un système et son environnement (et en fait le bilan au niveau de l'énergie interne). Nous nous intéressons ici à la chaleur, qu'on peut définir comme " l'énergie qu'un corps communique à un autre à cause de leur différence de température ".

La chaleur se communique d'un endroit à un autre de trois manières différentes : par conduction, convection ou rayonnement.

La Conduction

C'est un transfert de chaleur qui se fait sans mouvements macroscopiques, sous l'influence d'un gradient de température. Prenons l'exemple d'une barre métallique qu'on chauffe à une de ses extrémités: l'agitation thermique des atomes situés à l'extrémité chauffée de la barre augmente et se transmet de proche en proche dans la direction du gradient thermique (du chaud vers le froid). La conduction est donc le résultat de collisions moléculaires. On l'observe principalement dans les solides : dans les métaux, elle fait intervenir les électrons libres qui les rendent bons conducteurs de la chaleur. En revanche, dans les isolants, la conduction se fait mal. De là la forte correspondance entre les propriétés thermiques et électriques des solides.

La Convection

La convection implique le transport de la chaleur par une partie d'un fluide qui se mélange avec une autre particule. Elle prend sa source dans un transport macroscopique de matière et ne concerne donc pas les solides. Lorsqu'on chauffe une casserole d'eau, l'eau proche du gaz est chauffée en premier et se dilate, entraînant une diminution de sa masse volumique. Il se forme alors des courants de convection dans la casserole: l'eau plus chaude s'élève et est remplacée par l'eau plus froide du haut de la casserole.

Ce processus s'associe donc à l'action de la gravité: si on chauffe la casserole par le haut, le fluide chaud se situe au-dessus du froid et la convection est annihilée. Dans ce cas, seule la conduction intervient.

Le Rayonnement

La conduction et la convection supposent la présence de matière. Le rayonnement, lui, permet un transfert d'énergie qui peut s'effectuer à travers le vide: c'est par rayonnement que nous arrive l'énergie solaire. Il s'agit ici de rayonnement électromagnétique. Soulignons que le rayonnement n'est pas un mode de transfert de chaleur mais d'énergie, celle-ci pouvant se transformer en chaleur au contact d'un corps (par exemple lorsque l'on s'expose au Soleil à la plage; nous reviendrons sur cette transformation un peu plus loin). Ainsi, une partie de l'énergie solaire sert à l'assimilation chlorophyllienne des végétaux et ne transforme donc pas en chaleur.

Lorsqu'un corps rayonne, cette émission peut provenir de différentes sources d'énergies (décharge électrique dans un gaz raréfié, émission photocimique, etc.). On s'intéresse ici au rayonnement (purement) thermique (ou par incandescence): il ne dépend que de la température de la source.

Interactions matière/rayonnement

Comportement des surfaces par rapport au rayonnement (thermique)

Nous donnons une brève description des mécanismes mis en jeu ci-après.

Emission

Le rayonnement thermique émis par un corps porté à une certaine température résulte d'une conversion de l'énergie interne du corps en rayonnement.

Absorption

Inversément, l'absorption est la transformation de l'énergie incidente en énergie interne

Réflexion et diffusion

Dans ce cas, le rayonnement incident est directement renvoyé par la surface. Lorsque le renvoi obéit aux lois de l'optique géométrique (l'angle réfléchi égale l'angle incident), on parle de réflexion. La diffusion est le renvoi du rayonnement incident dans toutes les directions. La réflexion se fait sur toutes les surfaces lisses et polies (miroir), alors que des surfaces rugueuses diffusent le rayonnement incident.

— **Transparence et opacité**

Un milieu est transparent lorsqu'il transmet intégralement le rayonnement incident. Le vide est un milieu transparent à toutes les longueurs d'ondes du spectre électromagnétique.

En première approximation, le verre est un milieu transparent pour des longueurs d'ondes dans le domaine du visible. Inversément, un corps est dit opaque lorsqu'il ne transmet aucune partie du rayonnement incident. Ainsi, le verre est quasiment opaque à l'infra-rouge.

La notion de transmission est donc fortement liée à la longueur d'onde incidente. En toute rigueur, il faut aussi tenir compte de l'épaisseur du matériau traversé.

De manière générale, chaque corps réagit de façon spécifique à un rayonnement incident, et divers paramètres entrent en jeu, comme la peinture par exemple. Ainsi, les corps blancs ont tendance à diffuser la lumière visible (solaire) sans l'absorber. En fait, lorsqu'une surface est soumise à un rayonnement incident, on effectue un bilan d'énergie du type $\alpha + \rho + \tau = 1$, où α est la fraction du rayonnement absorbée, ρ est la partie réfléchie (diffusée) et τ la partie transmise (qui traverse la surface). Ce bilan résulte de la conservation de l'énergie.

Nous allons maintenant nous pencher sur les mécanismes d'absorption et d'émission et établir un lien entre chaleur et énergie rayonnante.

— **Pourquoi un corps chauffé rayonne-t-il ?**

A la fin du **XIX**^e siècle, on sait que la chaleur fait vibrer les atomes et les molécules d'un solide et qu'atomes et molécules sont des agencements plus ou moins complexes de charges électriques. La théorie de Maxwell prévoit que des charges oscillantes émettent une radiation électromagnétique. Ceci est déjà confirmé à l'époque par les expériences de Hertz sur des antennes simples. La radiation émise voyage à la vitesse de la lumière. Lorsqu'un corps est chauffé, les vibrations moléculaires et atomiques qui en résultent incluent des charges oscillantes. Si on suppose que la théorie de Maxwell est valable à l'échelle atomique, on en déduit que ces charges émettent un rayonnement électromagnétique.

— **Comment une radiation est-elle absorbée ?**

Considérons un rayonnement lumineux (dont la longueur d'onde se situe dans le domaine visible du spectre électromagnétique) : s'il rencontre une surface de verre, il passe au travers; il est par contre réfléchi par une surface métallique brillante. Mais un matériau noir tel la suie l'absorbe en grande partie, ce qui provoque un réchauffement du matériau.

Si l'on reprend l'image décrite ci-dessus, on peut en déduire que les électrons des atomes constitutifs du verre n'oscillent pas en présence d'un rayonnement visible. En fait les électrons sont fortement liés aux atomes, et ils ne peuvent osciller qu'à certaines fréquences en réponse à un champ électrique extérieur oscillant. Il se fait que ces fréquences ne sont pas celles du visible mais opaque à l'IR et à l'UV.

Dans le cas du métal, les électrons sont beaucoup plus faiblement liés aux atomes (très faible électronégativité) et peuvent donc se déplacer quasi librement (ce qui explique la bonne conductivité des métaux). Ils peuvent dès lors osciller avec une grande amplitude en réponse au champ électrique d'une onde visible. Suite à cette oscillation, ils émettent un rayonnement qui est en fait ici le même que le rayonnement incident : au niveau macroscopique, la lumière est réfléchie. L'énergie rayonnante incidente est donc absorbée puis intégralement réémise.

La suie possède également des électrons libres, mais leur libre parcours moyen (c'est à dire la distance moyenne qu'ils peuvent parcourir avant de percuter une autre particule) est plus petit, et les collisions qui en résultent provoquent un réchauffement du matériau (une partie de l'énergie rayonnante incidente est transformée en chaleur). Ceci correspond bien à l'absorption (partielle) du rayonnement incident.

— **Absorption et émission**

Le mécanisme d'émission est très similaire: pour la suie, la chaleur provoque des vibrations du réseau du solide (agencement symétrique dans l'espace des atomes constitutifs du solide) faisant ainsi osciller des électrons, ce qui résultent en l'émission d'un rayonnement.

Lors du chauffage d'un métal, les électrons, ayant un plus grand libre parcours moyen, sont moins affectés par les vibrations de réseau et donc rayonnent moins. lorsque la température augmente, les vibrations du réseau sont plus marquées, ce qui réduit le libre parcours moyen des électrons : le métal "rayonne plus" (il émet un rayonnement plus énergétique). C'est ce que l'on observe lorsqu'on voit la couleur d'une barre de métal chauffée passer du rouge au blanc.

De manière générale, l'augmentation de la température d'un corps favorise un rayonnement de plus en plus énergétique. Nous y reviendrons plus loin. En fait, tout corps à une température supérieure au zéro absolu rayonne.

Il ressort de ces considérations que les corps qui absorbent le plus sont aussi ceux qui émettent le plus.

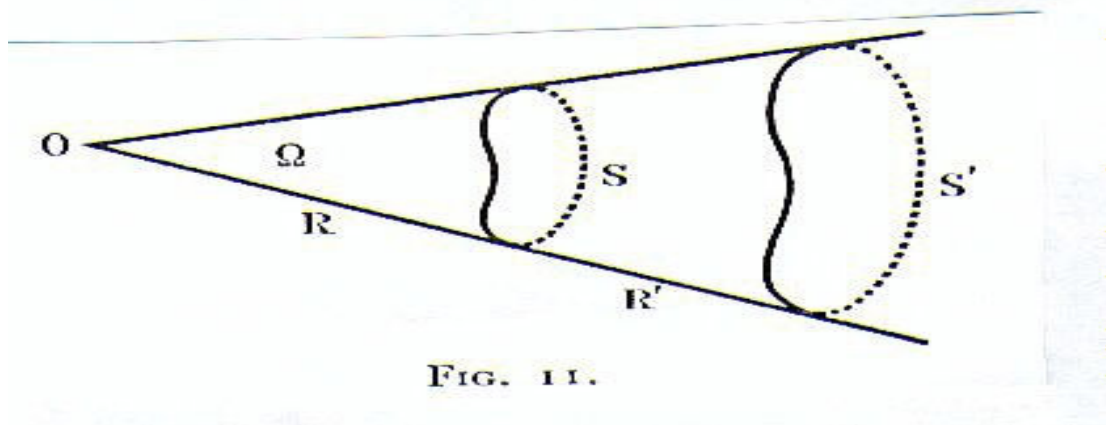
- Quelques définitions

Nous aurons d'abord besoin de quelques concepts géométriques avant de pouvoir aborder le corps noir proprement dit.

- Angle solide

Commençons par la notion d'angle solide: la mesure ω , en stéradians, d'un angle solide défini par une nappe conique de sommet O est:

$\Omega = \frac{S}{R^2}$ (voir.Fig.11), S étant la surface qu'elle détermine sur la sphère de centre O et de rayon R.



De manière générale, on définit un angle solide élémentaire $d\omega$ par un point O et un contour limitant une surface dS dont les dimensions sont très petites par rapport à la distance $OP=r$ de O au point moyen P de dS . L'orientation de dS est déterminée par l'angle θ que fait OP avec la normale PN en P à l'élément de surface. L'angle solide $d\Omega$ détermine sur la sphère de rayon r une surface

$d\Sigma = dS \cos\theta$ et on a par suite $d\Omega = \frac{dS \cos(\theta)}{r^2}$ (voir.Fig.12).

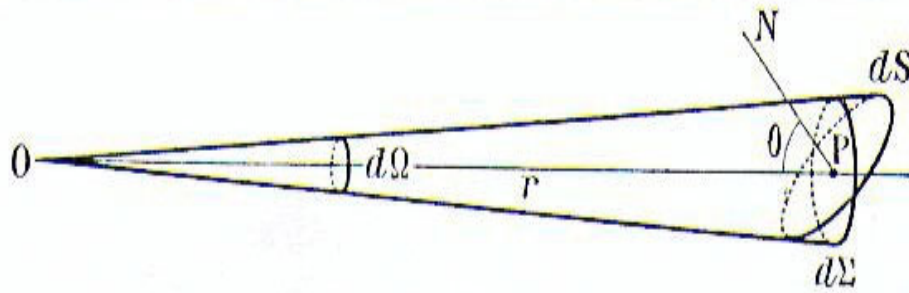


FIG. 12.

Ensuite le tube élémentaire (voir Fig. 14):

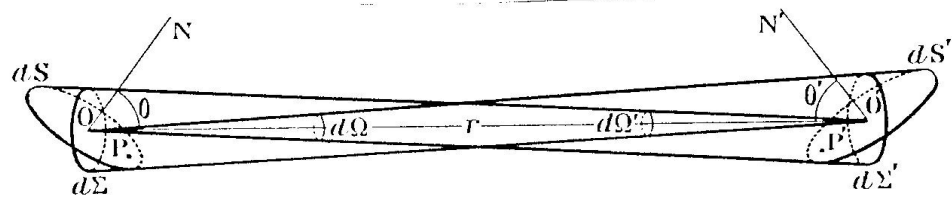


FIG. 14.

un angle solide $d\Omega$ de sommet P contient tous les rayons qui, passant par P, traversent dS' . L'ensemble de tous les angles solides $d\Omega$ dont les sommets sont tous les points de dS forment un tube élémentaire de rayons ou tube de rayonnement qui contient tous les rayons qui joignent un point quelconque de dS à un point quelconque de dS' . La droite OO' est la direction du tube, $d\Sigma$ et $d\Sigma'$ sont les surfaces apparentes de dS et dS' dans la direction de tube.

Flux énergétique de rayonnement

Définissons à présent quelques grandeurs énergétiques typiques du rayonnement, indispensables à la compréhension des propriétés du corps noir.

On définit le flux énergétique de rayonnement $d\Phi$ comme étant la quantité d'énergie reçue par unité de temps (cà la puissance de rayonnement) par une surface dS , énergie émise par une source ponctuelle. Il s'exprime en watts (W).

On suppose que le rayonnement se propage dans un milieu transparent et homogène.

Luminance énergétique

La luminance énergétique de la source dS dans la direction OO' est le flux par unité de surface émettrice apparente $d\Sigma$ par unité d'angle solide $d\Omega$

$$L = \frac{d^2 \Phi}{d\Sigma d\Omega} ; \text{ où } L \text{ s'exprime en } W m^{(-2)} sr^{(-1)} \text{ et } d\Sigma = dS \cos \theta$$

Rem: 1) la définition de L est indépendante du choix d'une surface réceptrice

2) L dépend à priori de la direction OO' .

Lorsque L est indépendante de la direction, on dit que la source obéit à la loi de Lambert.

Coefficient d'absorption

Pour finir, nous définirons le coefficient d'absorption α du récepteur dans la direction où le rayonnement est reçu par:

$\alpha = d\Phi' / d\Phi$; où $d\Phi'$ est le flux énergétique absorbé par la surface réceptrice dS' et $d\Phi$ le flux émis par dS .

L

Toutes ces grandeurs peuvent être rapportées à leur décomposition spectrale en longueur d'onde. Ceci résulte du principe de superposition: tout rayonnement est la superposition de rayonnements monochromatiques. Ainsi, on définit:

$$L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda} \quad \text{et} \quad \alpha_\lambda = d\phi_\lambda' / d\phi_\lambda$$

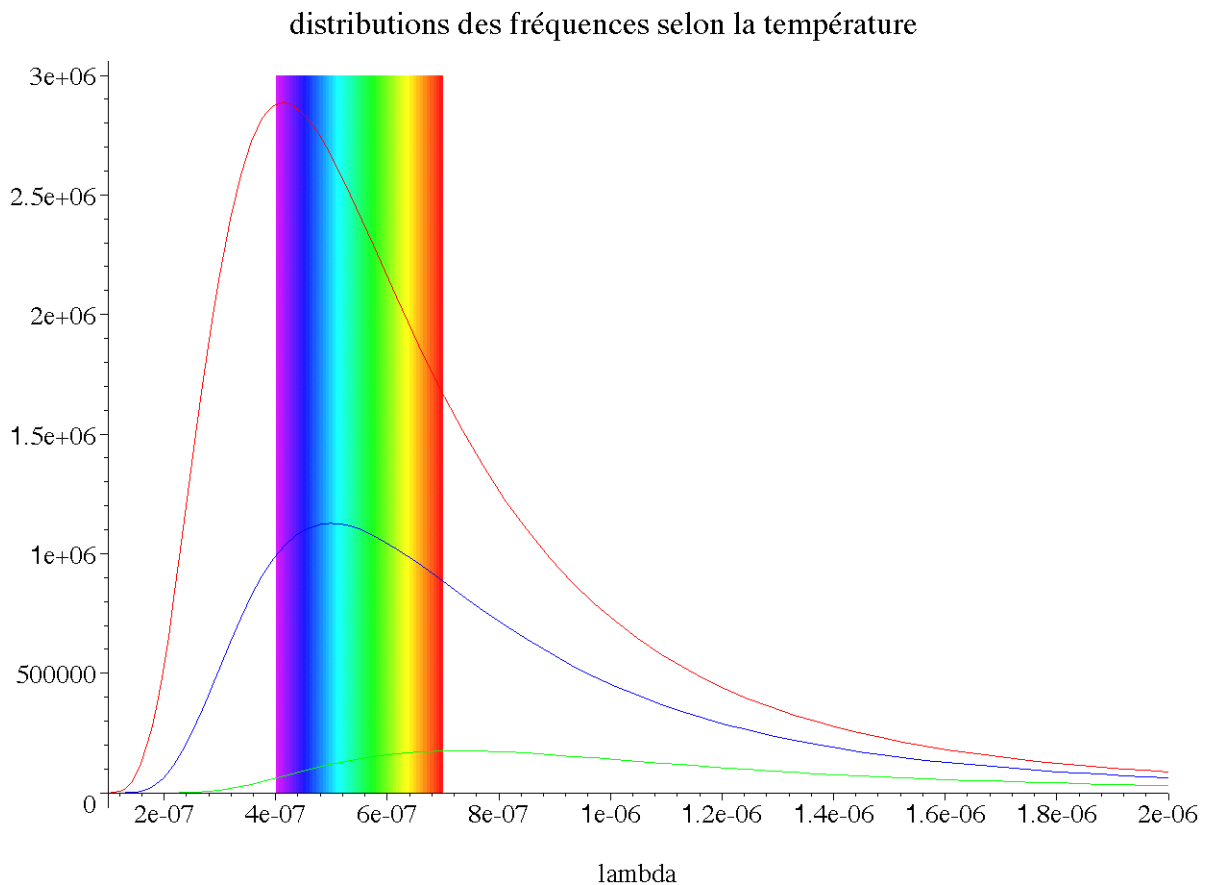
Le Corps Noir - Le Rayonnement du Corps Noir

A ce stade de notre explication, il convient de rappeler la distinction entre un corps de couleur noire et un corps noir. En effet, un corps de couleur noire n'est pas un corps noir au sens de l'énergie. Un corps de couleur noire a un facteur d'absorption proche de un à température ambiante et dans le domaine visible du spectre électromagnétique. Ceci n'est pas forcément vrai pour d'autres longueurs d'ondes. Imaginons par exemple un sous-marin de couleur noire; nous pouvons détecter sa présence à l'aide d'un radar, ce qui prouve bien qu'il n'absorbe pas le rayonnement radio. Ainsi, pour un récepteur thermique, α_λ dépend en général de la température et du domaine spectral considéré.

Un corps noir, ou récepteur intégral, est par définition un récepteur thermique dont le facteur d'absorption est égal à l'unité quelle que soit la longueur d'onde du rayonnement incident.

C'est donc un corps qui absorbe intégralement tout rayonnement incident, quelle que soit sa longueur d'onde : il n'y a ni réflexion, ni diffusion, ni transmission.

Comme discuté plus haut, le corps noir est donc aussi l'émetteur idéal: il émet plus d'énergie que tout autre corps à n'importe quelle longueur d'onde. La radiation émise, appelée "rayonnement du corps noir" se distribue selon le spectre suivant:



La courbe rouge correspond à une température de 7000 K, la bleue est à 5800 K et la verte à 4000 K.

Remarque: ce spectre a été déterminé expérimentalement avec les débuts de la spectroscopie dans les années 1890.

Une propriété importante du corps noir est qu'il est en équilibre thermodynamique avec son environnement. Ceci signifie qu'à une température donnée, il émet autant d'énergie qu'il en absorbe pour chaque longueur d'onde. De plus, le rayonnement émis est indépendant de la matière dont est composé le corps noir.

Réalisation d'un corps noir

Une bonne approximation d'un corps noir peut être réalisée à l'aide d'une cavité dont la paroi intérieure est recouverte d'une substance "quasi-noire" pour tout rayonnement ($\alpha_\lambda = 1$ quelque soit λ), et qui contient une petite ouverture (voir Fig. 16. et 17; ci-dessous). Tout rayonnement pénétrant dans la cavité par cette ouverture va collisionner plusieurs fois la paroi et sera donc totalement absorbé avant d'avoir pu ressortir.

Le four que nous utilisons fournit une telle approximation.

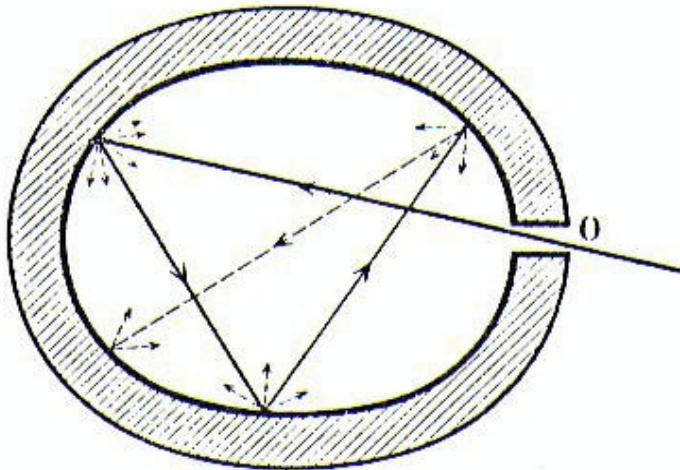


FIG. 16.

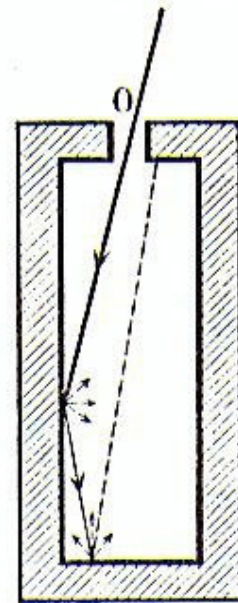


FIG. 17.

Expérience du four

Nous disposons d'un four cylindrique dont la paroi intérieure est presque parfaitement absorbante et dont la paroi extérieure est opaque à tout rayonnement. Nous plaçons à l'intérieur du four une petite pastille en terre cuite et nous fermons l'entrée en ne laissant qu'un petit trou. Nous chauffons le four à l'aide d'un variac et nous constatons qu'après un certain temps nous ne pouvons plus distinguer la pastille.

Ceci peut s'expliquer de la manière suivante: considérons une enceinte adiabatique (pas d'échange de chaleur avec l'extérieur) opaque à tout rayonnement qui contient des corps initialement à des températures différentes, et dont la paroi intérieure est à une température non uniforme. Supposons que les échanges énergétiques ne peuvent s'effectuer que par rayonnement (on fait le vide dans l'enceinte pour annuler conduction et convection). Corps et paroi vont émettre et absorber du rayonnement et le système va, en vertu du deuxième principe de la Thermodynamique (voir ci-dessous), s'acheminer vers un état d'équilibre avec uniformité de la température. Dans notre cas, le rayonnement émis par la pastille est alors le même que celui émis par la paroi du four : il est isotrope dans l'ensemble de la cavité.

En fait, chaque élément de surface tend à émettre autant de lumière que les éléments de surfaces voisines et ce à chaque fréquence; si ce n'était pas le cas, alors un transfert d'énergie s'effectuerait entre les éléments de surface en déséquilibre, et l'équilibre s'établirait après un

certain temps entre tous les éléments de surface et toutes les fréquences, car l'énergie est conservée. Le four forme alors un système à l'équilibre thermodynamique, et toute différence de température entre ses parties tend à disparaître parce que le rayonnement émis par un élément de surface doit être absorbé par un autre et que le rayonnement ne peut s'échapper du four. Il s'établit donc une température uniforme après un temps de mise à l'équilibre.

— Le Deuxième Principe de la Thermodynamique

Il introduit l'entropie S (grandeur extensive, additive et exactement différentiable). S est définie pour tout système thermodynamique. On a :

$$dS = \frac{dQ}{T} . \text{ Tout système laissé à lui-même tend vers un équilibre thermodynamique pour lequel son entropie est maximale. Il y a alors uniformité pour la température.}$$

— Luminance et facteur d'absorption. Loi de Kirchhoff

Il existe, suite à ce que nous avons dit, à l'intérieur du four un équilibre de rayonnement à la température T ; ce rayonnement étant un rayonnement de corps noir caractérisé pour chaque radiation par une luminance énergétique monochromatique $L(\lambda) = f(\lambda, T)$ indépendante de la direction.

Considérons un élément dS de surface de la pastille (qui est un corps non noir) : sa température étant constante, il absorbe pour une longueur d'onde quelconque et une direction quelconque OO' une énergie égale à celle qu'il émet. Soit $\alpha(\lambda)$ le facteur d'absorption monochromatique de dS relatif à λ et à la direction OO' et $l(\lambda)$ sa luminance énergétique monochromatique relative à la même longueur d'onde et à la même direction. Dans la direction considérée, dS reçoit le flux énergétique $d^2\Phi$ relatif à λ :

$d^2\phi = d\phi(\lambda) d\lambda = L(\lambda) d\Sigma d\Omega d\lambda$ où $L(\lambda)$ = luminance du rayonnement de corps noir qui existe dans la cavité et $d\Sigma, d\Omega$ ont été définis plus haut

il absorbe: $d^2\phi' = \alpha(\lambda) d^2\phi = \alpha(\lambda) L(\lambda) d\Sigma d\Omega d\lambda$

il émet: $d^2\phi = l(\lambda) d\Sigma d\Omega d\lambda$

$$\Rightarrow l(\lambda) = \alpha(\lambda) L(\lambda) \quad (1)$$

remarque: $\alpha(\lambda)$ dépend de la direction: l'émission d'un corps non noir n'obéit en général pas à la loi de Lambert.

Pour une direction donnée, (1) est valable pour tout $\lambda \Rightarrow l = \alpha L$

Pour le corps noir, $\alpha(\lambda) = 1$ pour tout λ et pour toute direction $\Rightarrow l(\lambda) = L(\lambda)$ et $l = L$

— Loi de Kirchhoff

La luminance énergétique monochromatique $l(\lambda)$ d'un corps noir à la température T dans une direction déterminée est proportionnelle à son facteur d'absorption $\alpha(\lambda)$ dans les mêmes conditions; elle est inférieure à celle du corps noir à la même température; il en est de même du rayonnement total pour l'ensemble des longueurs d'onde:

$$l(\lambda) = \alpha(\lambda) L(\lambda) < L(\lambda) ; l = \alpha L < L$$

Dans notre cas, la paroi intérieure du four se comporte comme un corps noir et on peut reformuler la loi de Kirchhoff comme suit:

"dans la cavité de l'enceinte existe un rayonnement indépendant de la nature de la matière dont est constituée la paroi de l'enceinte. À l'équilibre thermique, ce rayonnement ne dépend que de la température".

— Loi de Stefan-Boltzmann

Remarque : "Nous avons jusqu'à présent travaillé avec la luminance $L(\lambda, T)$. Pour une longueur d'onde donnée λ et une température donnée T on peut également définir une densité d'énergie monochromatique $\rho(\lambda, T)$. Sa distribution en longueur d'onde est identique à celle de $L(\lambda, T)$. Nous utilisons $\rho(\lambda, T)$ dans la suite.

En 1879, le physicien autrichien Stefan a pu établir expérimentalement que la densité d'énergie totale $\rho(T)$ du corps noir à une température T augmente proportionnellement à la quatrième puissance de la température :

$$\rho(T) = a T^4$$

où a contient la constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{(-8)} \text{ Wm}^{(-2)} \text{ K}^{(-4)}$

$\rho(T)$ est l'intégration sur toutes les longueurs d'ondes de $\rho(\lambda, T)$:

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu \quad \text{où } \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{est la fréquence.}$$

En fait, $\rho(T)$ représente l'aire totale sous la courbe de distribution spectrale, et on peut effectivement constater qu'elle augmente très rapidement avec la température d'après les trois spectres ci-dessus.

Démonstration

En 1884, Boltzmann a démontré cette loi à partir de la théorie de l'électromagnétisme et d'un raisonnement thermodynamique. On démontre en électromagnétisme que l'émission ou l'absorption d'un rayonnement, dont la densité d'énergie est ρ , fait intervenir une pression dite pression de radiation. Dans le cas d'une enceinte qui se comporte comme un corps noir, cette

pression est égale à : $P(T) = \frac{\rho(T)}{3}$. Ceci provient du fait qu'en une dimension, la pression de radiation vaut la densité d'énergie électromagnétique, et donc par symétrie spatiale, en trois dimensions, cette énergie se répartit dans les trois directions de l'espace, et est donc divisée par trois.

L'énergie totale est la densité d'énergie multipliée par le volume considéré: $E = \rho(t)V$ (1). Supposons que ce volume puisse varier (en plaçant par exemple un piston mobile à une des extrémités de la cavité) : le travail de la pression de radiation lors d'une dilatation dV du volume est :

$dW = -PdV = -\frac{\rho}{3}dV$. La variation d'énergie interne du système est $dE = dQ + dW$ (en vertu du premier principe de la Thermo.). Or, d'après (1) ci-dessus on a :

$$dE = \rho dV + \frac{V d\rho dT}{dT}, \text{ donc } dQ = \rho dV + \frac{V d\rho dT}{dT} + \frac{\rho}{3}dV \text{ et } dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}$$

$\left[\frac{4\rho dV}{3} + \frac{V d\rho dT}{dT} \right]$. Comme dS est une différentielle exacte on en déduit:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{4\rho}{3T} \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V d\rho}{T dT} \right]. \text{ Ceci nous donne: } \frac{d\rho}{dT} = 4\frac{\rho}{T} \text{ et donc } \ln(\rho) = 4\ln(T) + \text{cte, ou encore } \rho = \text{cte}T^4, \text{ cqfd.}$$

Loi de déplacement de Wien

En 1893, Wien a apporté une information supplémentaire sur l'allure du spectre en montrant la relation suivante:

$$\lambda T = \text{const.} = 0,2897 \text{ cmK}$$

λ étant exprimée en centimètres. Si on applique cette relation au maximum de la courbe, on trouve que sa longueur d'onde doit diminuer si la température augmente. Nous pouvons effectivement le constater en comparant les trois courbes ci-dessus.

Les lois de Stefan et de Wien nous donnent donc deux informations sur le comportement du spectre lorsqu'on augmente la température: l'aire totale sous la courbe augmente

proportionnellement à T^4 et la longueur d'onde du maximum diminue selon la relation ci-dessus.

Expériences du filament et de la lampe à incandescence

On s'est rendu compte qu'un certain nombre de corps émettent un rayonnement proche de celui du corps noir. C'est par exemple le cas pour un filament de tungstène chauffé par résistance à un courant électrique dans une lampe à incandescence, ou pour un filament en Nickel-Chrome chauffé à l'air libre. Nous disposons ici d'une ampoule (dont le filament est en tungstène) placée derrière un réseau de diffraction et reliée à un variac (chauffage progressif), ainsi que d'un filament de Nickel-Chrome également relié à un variac (et à un ampèremètre). Nous avons aussi un thermocouple et un détecteur d'infrarouge. Nous n'avons pas la possibilité de tirer un spectre d'émission, mais nous pouvons mettre en évidence la loi de déplacement de Wien, et également le fait que les deux filaments se comportent de la même manière, illustrant la propriété que le rayonnement d'un corps noir ne dépend pas de la matière dont il est composé.

Commençons par le filament en Ni-Cr : lorsqu'on le chauffe légèrement (un léger courant passe dans l'ampèremètre), on ne perçoit aucun rayonnement, mais le détecteur (relié à un voltmètre) nous indique une émission d'infrarouge : à cette température, le maximum d'émission de la courbe de "corps noir" se situe donc dans l'infrarouge. Si on chauffe plus on constate que le fil commence à rougir, puis devient rouge vif : le maximum d'émission est dans la partie rouge du domaine visible. On remarque qu'on détecte encore une certaine quantité d'infrarouge : ceci est dû au fait que la courbe ne présente pas un pic à une certaine longueur d'onde, mais possède une certaine dispersion (il y a une "bande d'émission" privilégiée). Si on continue à chauffer, le fil devient orange vif puis blanc.

Cette couleur blanche est due à la superposition des couleurs qui constituent le spectre visible, cette superposition résultant de la dispersion mentionnée plus haut. Le passage de l'IR au rouge, du rouge à l'orange, ... illustre la loi de déplacement de Wien. Le thermocouple nous permet en outre de voir que le passage au rouge ne s'effectue qu'à partir de quelques centaines de degrés (K).

Le comportement du filament de l'ampoule est le même. Quand il est chauffé à blanc, cette lumière est décomposée par le réseau en toutes les composantes de la lumière visible. On constate que si on rediminue la température, les composantes violettes et bleues disparaissent en premier, suivies du vert, etc jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le rouge, qui finit également par disparaître. Ici encore, on a cohérence avec la loi de Wien.

Il est important de réaliser que les filaments ne sont pas vraiment des corps noirs, celui-ci étant par définition un corps idéal. En fait, beaucoup de corps sont des *corps gris*. Un corps gris est une source de lumière incandescente d'où le rayonnement s'échappe vers l'espace environnant. Un équilibre thermodynamique ne peut s'établir car le corps perd de l'énergie sous forme de rayonnement. Il peut cependant être dans un état stationnaire ou quasi-stationnaire proche de l'état d'équilibre.

Calcul de la distribution d'énergie en fréquence et en température

Jusqu'ici, les différents résultats obtenus nous ont permis de tirer des informations sur le comportement du spectre face à une variation de la température, mais nous n'avons aucune information sur l'allure de la courbe. Nous donnons ici les étapes qui ont mené à l'obtention d'une formule (en accord avec les résultats expérimentaux) pour $\rho(\lambda, T)$.

Reprenons notre four, isolé thermiquement du monde extérieur. On y différencie deux sous-systèmes énergétiques : la matière du four et le champ électromagnétique produit par les charges des parois après excitation (on suppose donc que le vide règne à l'intérieur du four). Comme on n'a pas de sources électriques à l'intérieur du four, le champ électromagnétique est solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \right\}$$

On s'intéresse à ce qu'il se passe dans un cube de côté L . On suppose que l'onde s'annule aux bords. On remarque que cette équation est la même que celle décrivant les vibrations d'une corde. On peut donc faire l'analogie entre les deux.

Nous regardons d'abord le problème à une dimension.

Le problème à une dimension

Mathématiquement, la résolution de cette équation (avec les conditions aux bords précitées) passe par une description de l'onde en série de Fourier L périodique; après avoir réinséré cette fonction dans l'équation, nous trouvons directement (on a déjà tenu compte des conditions aux bords):

$$\Phi(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t)) \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \text{ où } \omega_m = \frac{c m \pi}{L}$$

A_m et B_m sont donnés par les conditions initiales:

$$A_m = \frac{2 \int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) dx}{L} \text{ et } B_m = \frac{2 \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_0(x, 0)\right) \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) dx}{L \omega_m}$$

D'un point de vue physique, on fait l'analogie avec une corde vibrante car c'est la même équation dans les deux cas. On regarde alors le m° mode propre (c'est à dire non propagatif (mais oscillant quand même)) de la corde vibrante. Par exemple, une solution du problème de la corde vibrante pour le m° mode est donnée par

$$\phi(x, t) = \sin(\omega t + \alpha) \sin(k x), \text{ où } k = \frac{m \pi}{L} \text{ car la corde doit avoir } m-1 \text{ noeuds, et } \omega = c k$$

d'après l'équation. Dès lors, les fréquences propres sont données par $\nu_m = \frac{c m}{2 L}$. Comme

l'équation est linéaire, la solution générale est donnée par une combinaison linéaire de cette solution où l'on prend en compte les solutions cosinoïdales, donc la solution plus haut. Il faut surtout remarquer que l'on somme les modes correspondant à des oscillations à des fréquences différentes; ces différents oscillateurs ne se perturbent donc pas entre eux, et donc leur énergie U_m est conservée. Quand on chauffe le four, ce sont les charges oscillantes qui émettent l'énergie électromagnétique. Lorsque l'équilibre thermodynamique s'est établi entre les modes propres électromagnétiques et les parois du four, l'énergie continue à fluctuer aléatoirement mais l'énergie moyenne, obtenue par moyenne temporelle, prend une valeur déterminée par la thermodynamique et la mécanique statistique. Or l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique est classiquement $\langle E \rangle = k_B T$.

(k_B est la constante de Boltzmann et vaut $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$)

$$\langle E \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} m \xi^2 2 k_B T e^{(-\xi^2)}}{2 m} d\xi}{Z} \text{ où } \xi = v_x \sqrt{\frac{m}{2 k_B T}} \text{ et}$$

$$Z = 2 \int_0^{\infty} e^{(-\xi^2)} \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} d\xi = \frac{2 \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}}{2} \text{ est un facteur de normalisation, représente}$$

l'énergie moyenne d'une particule ayant une vitesse v_x et une masse m .

Mais comme cette intégrale est symétrique par rapport à 0 et que

$$\int_0^{\infty} \xi \xi e^{(-\xi^2)} d\xi = - \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{(-\xi^2)}}{2} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(-\xi^2)} d\xi = \frac{1 \sqrt{\pi}}{2 \cdot 2} \text{ et finalement } \langle E \rangle = \frac{k_B T}{2} \text{ pour}$$

l'énergie cinétique moyenne. Comme il faut rajouter l'énergie potentielle moyenne et que le

calcul est le même dans le cas d'un oscillateur harmonique (on remplace $\frac{m v_x^2}{2}$ par $\frac{1}{2} K x^2$), on a au total une énergie moyenne $\langle E \rangle = k_b T$.

Ceci étant l'énergie moyenne classique pour un oscillateur harmonique, lorsqu'on veut l'énergie totale, on somme toutes ces énergies et on obtient l'infini! Ce résultat physiquement incohérent est appelé catastrophe ultraviolette.

Le problème à trois dimensions et la loi de Rayleigh-Jeans

L'équation ci-dessus admet (pour les conditions citées plus haut) la solution

$$\phi(x, y, z, t) = \sin(\omega t + \alpha) \sin\left(\frac{m_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{m_z \pi z}{L}\right)$$

où $m_x, m_y, m_z = 1, 2, 3, \dots$

Les fréquences d'oscillations $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ sont données ici par

$$\nu_{m_x, m_y, m_z} = \frac{c \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}}{2L}$$

Pour avoir l'énergie du système, nous devons comme précédemment compter le nombre de modes de modes ayant une fréquence inférieure à un certain ν . Ceux-ci sont

approximativement donnés par le huitième du volume d'une boule de rayon $m = \frac{2L\nu}{c}$, étant donné que tous les points situés sur une sphère de rayon m ont même fréquence. Donc

$$N_L = \frac{4\pi \left(\frac{L\nu}{c}\right)^3}{3}$$

La densité de modes est donc $N = \frac{4\pi \left(\frac{\nu}{c}\right)^3}{3}$ dans ce cas-ci et $\frac{dN}{d\nu} = \frac{4\pi \nu^2}{c^3}$.

La distribution en fréquence de la densité d'énergie est l'énergie moyenne multipliée par la densité spectrale de modes. Il faut encore multiplier le tout par 2 car la lumière a deux polarisations possibles.

On obtient donc : $\rho(\nu, T) = 2 \langle E \rangle \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \langle E \rangle$.

En remplaçant $\langle E \rangle$ par $k_b T$ on obtient la loi de Rayleigh-Jeans:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_b T$$

Même dans une cavité tridimensionnelle, il y a donc aussi prolifération des modes propres vers les hautes fréquences, la catastrophe ultraviolette n'est donc pas évitée. Pour la loi de Rayleigh-Jeans on a en effet:

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = \infty$$

Il faut cependant noter qu'aux basses fréquences la loi de Rayleigh-J. concorde avec le spectre expérimental.

Loi empirique de Wien

En 1895, Wien propose d'introduire une exponentielle décroissante dans l'expression de $\rho(\nu, T)$ afin d'éviter la divergence aux grandes fréquences:

$$\rho(\nu, T) = A \nu^3 e^{\left(-\frac{B \nu}{T}\right)}$$

La courbe obtenue est cette fois correcte pour les hautes fréquences mais ne concorde plus au spectre expérimental aux basses fréquences.

— L'hypothèse des quantas de Planck

La solution de ce problème fut fournie par Max Planck en 1900 à Berlin. Il suggéra que les énergies permises pour un oscillateur ne pouvait que des multiples entiers d'une quantité proportionnelle à sa fréquence d'oscillation, ce coefficient étant sa fameuse constante h .

$$E_n = n h \nu$$

$h\nu$ est appelé quantum d'énergie, et $h = 6,625 \cdot 10^{(-34)} \text{ Js}$

Il y a donc une différence fondamentale entre la physique classique et cette hypothèse, puisque les énergies permises sont ici en quantité dénombrable. Ceci est raisonnable car intuitivement, si un oscillateur de fréquence ν a une énergie moyenne de $k_b T$ il est peu probable qu'il émette un quantum d'énergie si le produit $h \nu$ vaut $5k_b T$ par exemple.

Dès lors, pour une température T et une fréquence ν_c données, il devient fort improbable qu'un quantum d'énergie se trouve sur les oscillateurs de fréquences supérieures à $\nu_c = \frac{k_b T}{h}$, ce qui permet de résoudre la catastrophe ultraviolette. En effet:

La probabilité qu'un des oscillateurs ait une énergie E_n est donnée par $P_n = \frac{e^{\left(-\frac{E_n}{k_b T}\right)}}{z}$ où z est un facteur de normalisation valant ici, vu la discretisation des énergies permises:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(-\frac{E_n}{k_b T}\right)}$$

L'énergie moyenne est donc: $\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(n) = \frac{\varepsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \frac{\varepsilon x d \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)}{d x}$ où $\varepsilon = h \nu$,

$E_n = n \varepsilon$ et $x = e^{\left(-\frac{\varepsilon}{k_b T}\right)}$. Comme $x < 1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et donc

$$\langle E \rangle = \frac{h \nu}{e^{\left(\frac{h \nu}{k_b T}\right)} - 1}$$

Ainsi, la distribution en fréquence de la densité d'énergie est (voir plus haut pour les détails):

$$\frac{d u}{d \nu} = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \frac{h \nu}{e^{\left(\frac{h \nu}{k_b T}\right)} - 1}$$

Ce résultat constitue la loi de Planck:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \frac{h \nu}{e^{\left(\frac{h \nu}{k_b T}\right)} - 1}$$

Il faut noter qu'à hautes fréquences ($h \nu \gg k_b T$), on retrouve la loi empirique de Wien et à basses fréquences ($h \nu \ll k_b T$), la loi de Rayleigh-Jeans (car $e^x = 1 + x + O(x^2)$ pour $x \ll 1$).

On peut de la sorte trouver la densité d'énergie:

$$u(T) = \int_0^\infty \frac{d u}{d \nu} d \nu = \frac{8 \pi (k_b T)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}{(h c)^3} = \frac{8 \pi^5 k_b^4 T^4}{15 (h c)^3} \text{ où l'on a utilisé}$$

le fait que

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty x^3 \left(\sum_{m=0}^\infty e^{-(m+1)x} \right) dx = \frac{\pi^4}{15} \text{ car}$$

$$(e^x - 1) \left(\sum_{m=0}^\infty e^{-(m+1)x} \right) = \sum_{m=0}^\infty (e^{-mx} - e^{-(m+1)x}) = 1 \text{ et } \zeta(4) = \sum_{n=0}^\infty n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Remarque: il faut noter que Planck a trouvé la formule exacte pour la densité d'énergie avant de faire son hypothèse de quantification : il a trouvé la formule en faisant une interpolation chanceuse entre la loi de Rayleigh-J. et la loi empirique de Wien.

Conséquences de la loi de Planck

L' introduction de la constante h (en fait, une nouvelle constante universelle) et d' une quantification de l'énergie a eu des conséquences phénoménales et a en fait donné naissance à une nouvelle Physique. Albert Einstein a été le premier à utiliser les résultats de planck en imaginant la lumière comme constituée de "grains" d'énergie $h \nu$ (qui seront appelés "photons") ce qui lui a permis d'expliquer l'effet photoélectrique. Dans cette optique, on peut considérer le rayonnement du corps noir comme un gaz parfait de photons. Mais la conséquence majeure de cette idée révolutionnaire de quantification de l'énergie a été le développement dans les années 1920 de la Mécanique Quantique par Heisenberg et Schödinger. Ceci a permis une nouvelle description de l'état atomique, description encore acceptée aujourd'hui!

"Applications" du corps noir

Comme nous l'avons dit plus haut, certains corps émettent un rayonnement proche de celui du corps noir. C'est le cas pour le rayonnement émis dans les couches profondes d'une étoile où il existe un équilibre radiatif. En effet les spectres stellaires se révèlent être continus avec des bandes d'absorption, mais ces dernières sont dues aux interactions du rayonnement émis par les couches profondes avec l'atmosphère de l'étoile. Ainsi, le spectre du soleil pris de l'espace (pour annihiler les perturbations de l'atmosphère terrestre) se surperpose presque à une courbe de corps noir à 6000 K. Cette approximation de certains corps célestes à des corps noirs permet une évaluation de température via la loi de Stefan si on connaît par exemple le flux de rayonnement à travers une sphère dont le rayon est celui de l'étoile (ce flux pouvant être relié à la densité d'énergie).

D' autre part, en 1965 Penzias et Wilson ont découvert (en travaillant dans le domaine des ondes radio) qu'il existe dans l'univers un rayonnement à 2,7 K (qu'on a appelé "rayonnement

fossile" parce qu'il serait réminiscent de la période du Big Bang) et le satellite COBE a plus tard révélé que le spectre de ce rayonnement se superpose quasi parfaitement à une courbe de corps noir à la même température. On pense que cet équilibre radiatif témoigne d'un équilibre qui existait entre matière et rayonnement peu après le Big Bang (à beaucoup plus haute température). L'équilibre de corps noir joue donc un rôle important en astrophysique.

Conclusion

Ce sujet nous a permis de constater que l'élaboration de nouvelles idées en physique n'est pas toujours linéaire et peut provenir d'un trait de génie(ou de beaucoup de chance). Ici, ce trait de génie ne fut jamais qu'une combinaison audacieuse des lois de Rayleigh et de Wien. Ce n'est d'ailleurs pas l'unique fois qu'une idée audacieuse a eu une portée phénoménale (on retiendra la fameuse hypothèse de l'onde de matière de Louis de Broglie).

Par ailleurs, nous avons passé une très bonne semaine et l'exposition a été une expérience enrichissante.

Nos remerciements à monsieur Hart .

Bibliographie

Duquesne, *La Physique*, De Boeck Université

Dévoré-Annequin, *Chaleur II*

Pierre Gaspard (ULB), *Mécanique Quantique*, tome 1