Faculté des
Sciences

Printemps des Sciences 2004

Mesure sans interactions : La bombe de Penrose

Yassin Chaffi, Jérôme Loreau et Nir Navon

Département de Physique

Conseillers : Nicolas Cerf, Raul Garcia-Patron Sanchez et Stefano Pironio

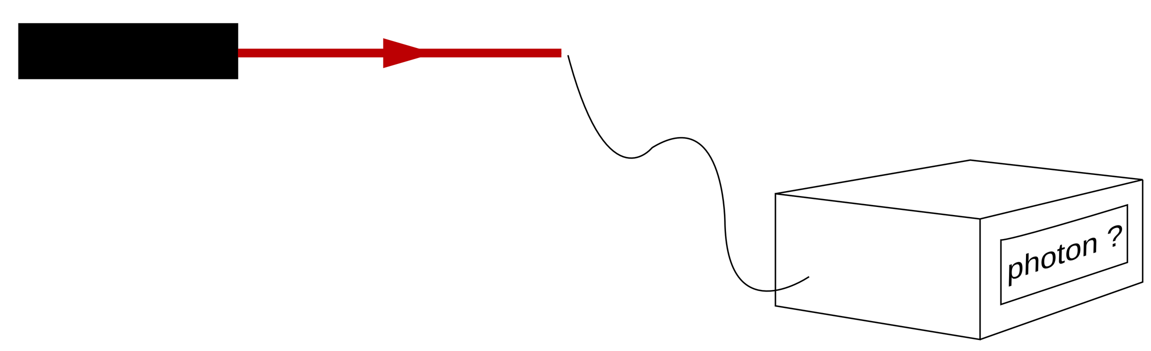
Introduction

La blague

Jacob, le vieux farceur, fait une blague à son ami physicien Ernest, en plaçant dans sa chambre une bombe dont le déclencheur est sensible à chaque photon.
Jacob : Cette fois mon vieux Ernest, te voila pris au piège ! Tu vas devoir trouver si la bombe est armée ou non avant d'allumer la lumière... Mais je te donne tout de même un indice : pour t'en sortir, tu auras besoin des propriétés de l'optique quantique...
Ernest : Ca tombe bien, j'ai étudié le sujet lors de mon doctorat !
Comment Ernest s'en sortira-t-il ?

Première stratégie

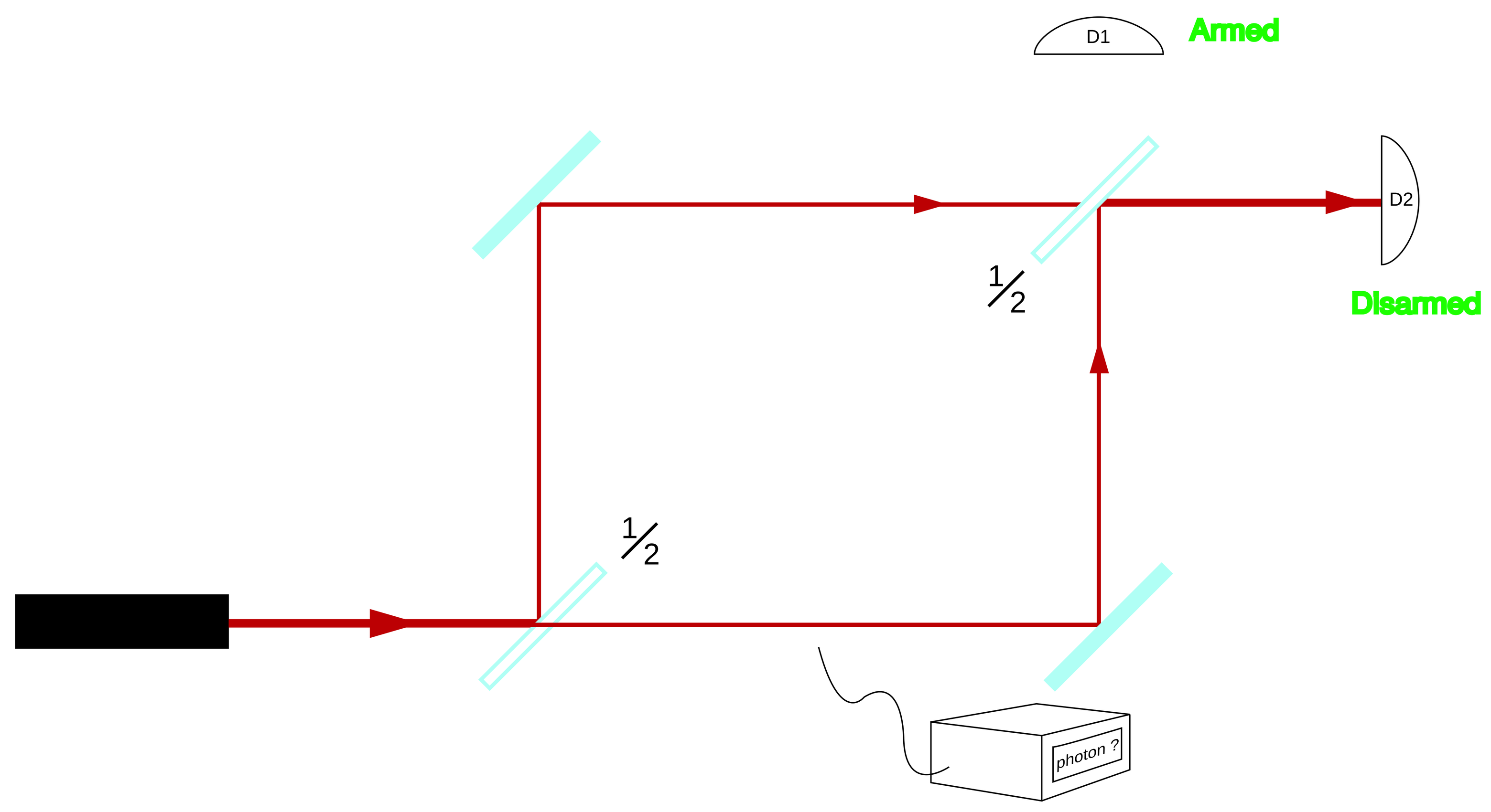
Pour détecter la bombe, Ernest pense d'abord à éclairer la bombe avec une source lumineuse d'intensité I.



Mais $I \geq 1$ photon, or le déclencheur est sensible au moindre photon.

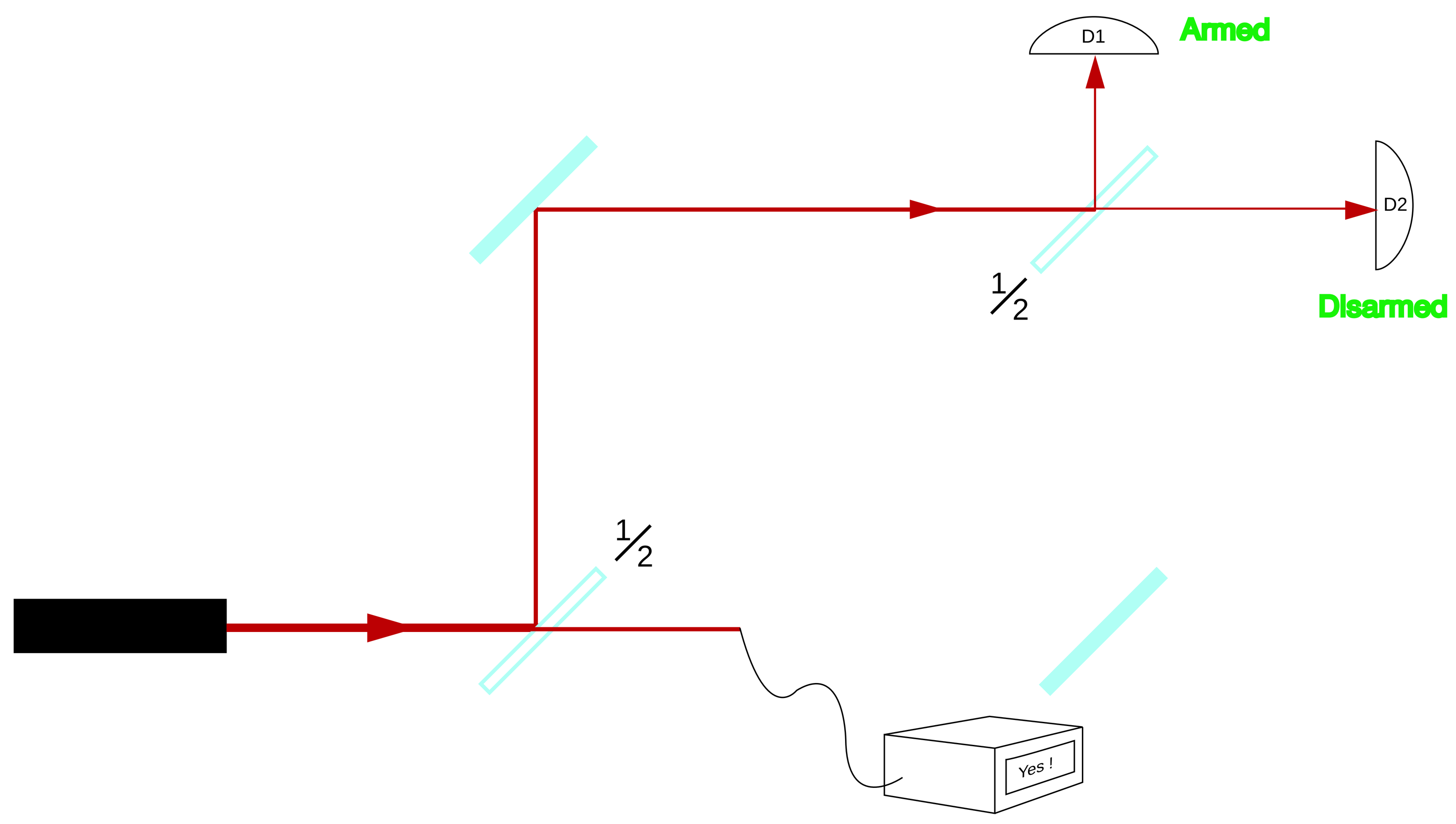
Deuxième stratégie

Déclencheur non-armé



P(bonne réponse) = 100%

Déclencheur armé



P(bonne réponse) = 25%
P(mauvaise réponse) = 25%
P(explosion) = 50%

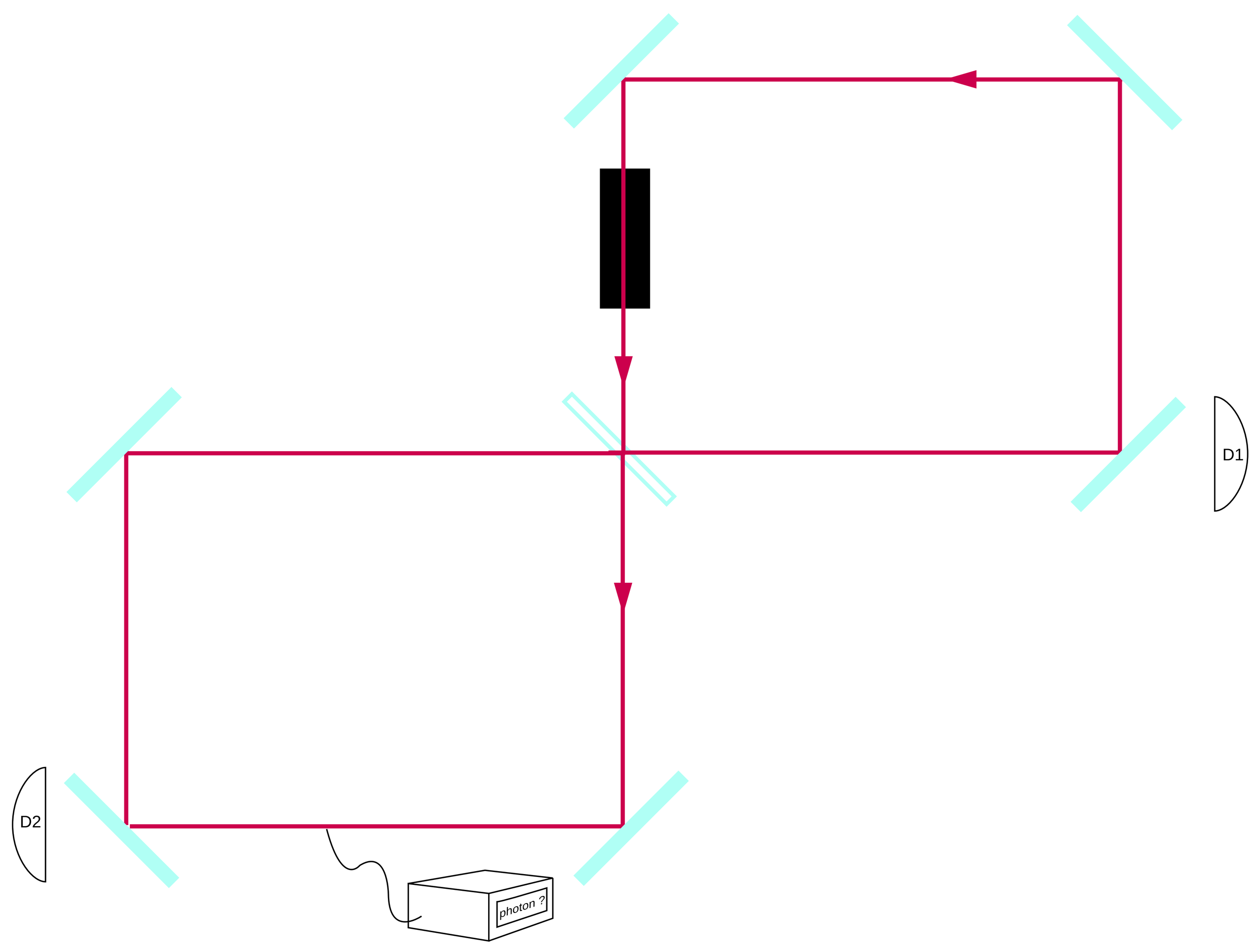
Puis, il se souvient du conseil de son ami et pense alors à l'effet Zénon quantique...

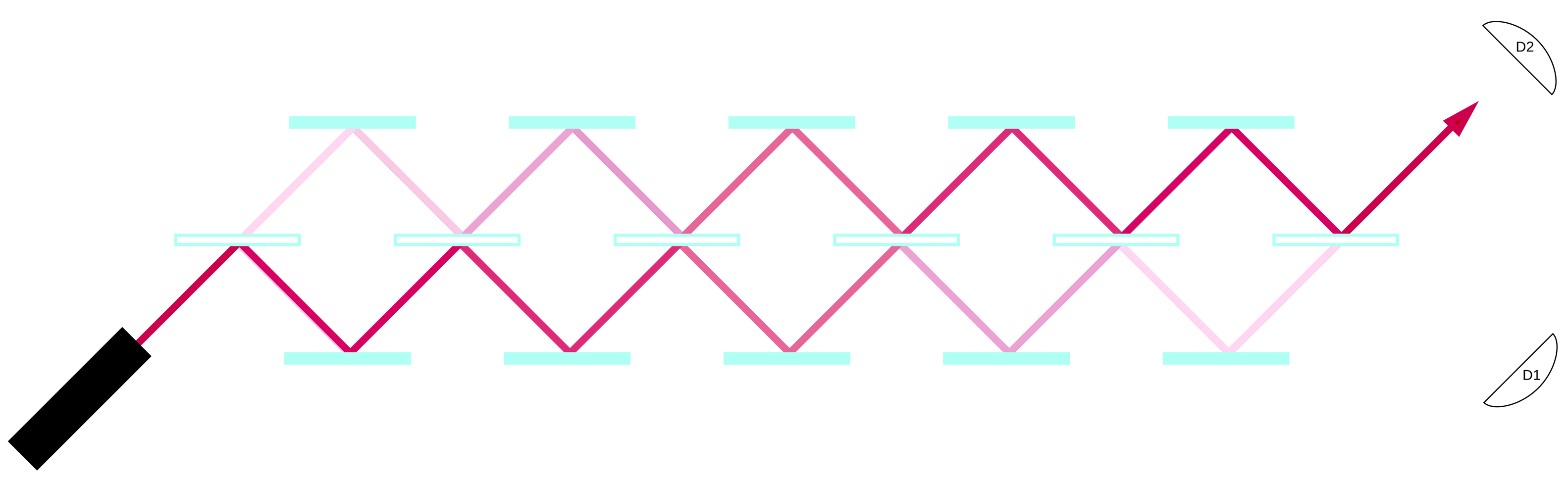
L'effet Zénon quantique

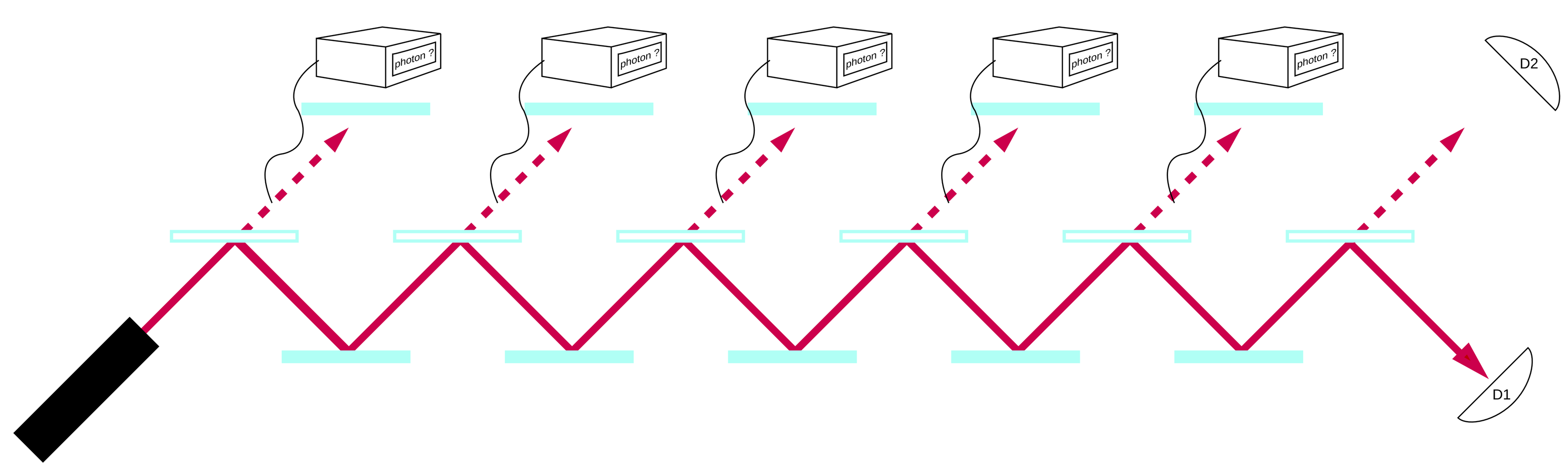
Cet effet tire son nom par analogie avec les paradoxes de Zénon. Mais dans le cadre quantique, il désigne un principe physique sans équivalent classique : en effectuant des mesures sur un système à intervalles de temps suffisamment petits, on gèle l'évolution de celui-ci, selon le principe que toute mesure perturbe l'état du système.

L'interféromètre à effet Zénon

Ernest pense donc alors à construire un nouvel interféromètre, qui peut être schématisé de deux manières :







Grâce à ce montage, dans lequel le photon passe un nombre **N** de fois dans l'interféromètre, la probabilité de détection de la bombe peut être rendue arbitrairement **proche de 100 %** en augmentant **N** !

Lorsque le déclencheur est armé :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\textbf{bonne réponse}) = 100\%$$
$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\textbf{mauvaise réponse}) = 0\%$$
$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\textbf{explosion}) = 0\%$$

Ernest sait alors que son ami en est bien un : la bombe n'était pas armée...

Formalisation du problème

On considère deux chemins possibles pour le photon : α (haut) et β (bas). Ces deux chemins représentent deux états orthogonaux du système, soit donc :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transformation au travers du diviseur de faisceau est

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et la transmittance du diviseur est

$$T = \sin^2\theta$$

Interféromètre de Mach-Zenhder

Dans ce cas, $T = 1/2$, ou encore $\theta = \pi/4$.

Déclencheur non-armé

Grâce à la formalisation matricielle, on montre que l'évolution du système est :

$$B(B(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le photon étant injecté en α, on le détecte en β.

Déclencheur armé

Après le premier diviseur, la probabilité pour le système d'être dans un des deux chemins (= module au carré de la composante correspondante) vaut bien 50% :

$$B(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

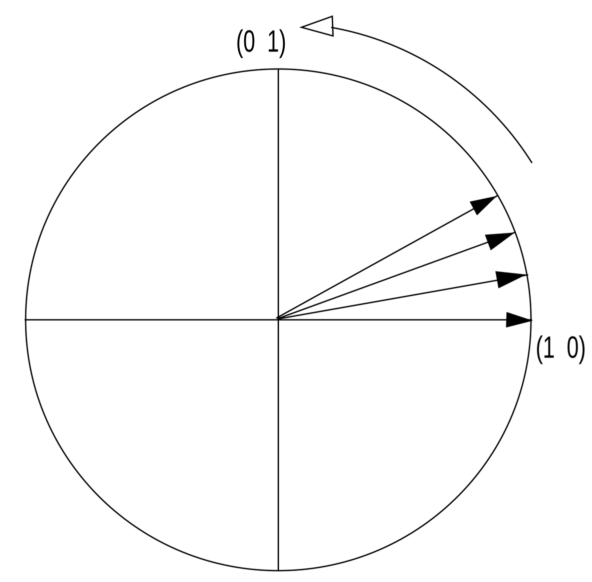
La bombe a donc 50% de chances d'exploser. Par contre, si elle n'explose pas, le photon se retrouve à nouveau dans l'état α. En suivant le même raisonnement, après le passage dans le deuxième diviseur, on a donc 50 % de chances de le détecter dans chacun des deux chemins, soit une probabilité globale de **25% de chances de savoir si la bombe est armée**.

Interféromètre à effet Zénon

Dans ce cas, $T = \sin^2\theta$ où $\theta = \frac{\pi}{2N}$. Puisque le diviseur est symbolisé par une matrice de rotation réelle, on peut étudier son effet dans un plan réel.

Etat initial : $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déclencheur non-armé

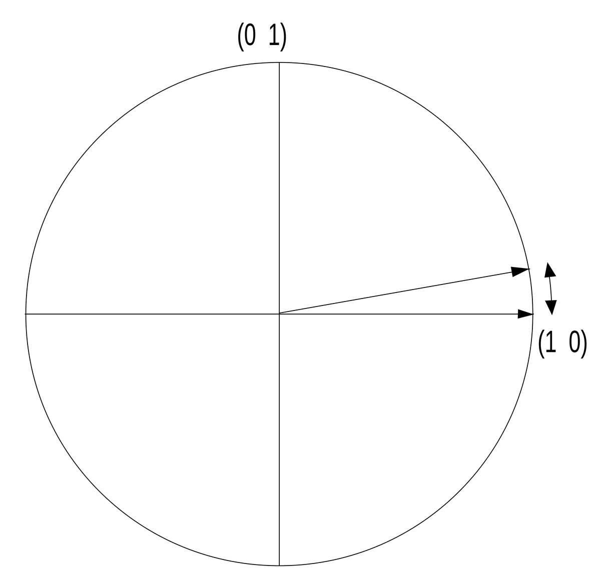


Après t passages : $B^t(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos t\theta \\ \sin t\theta \end{pmatrix}$.

Etat final, ou t=N : $B^N(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$

Déclencheur armé

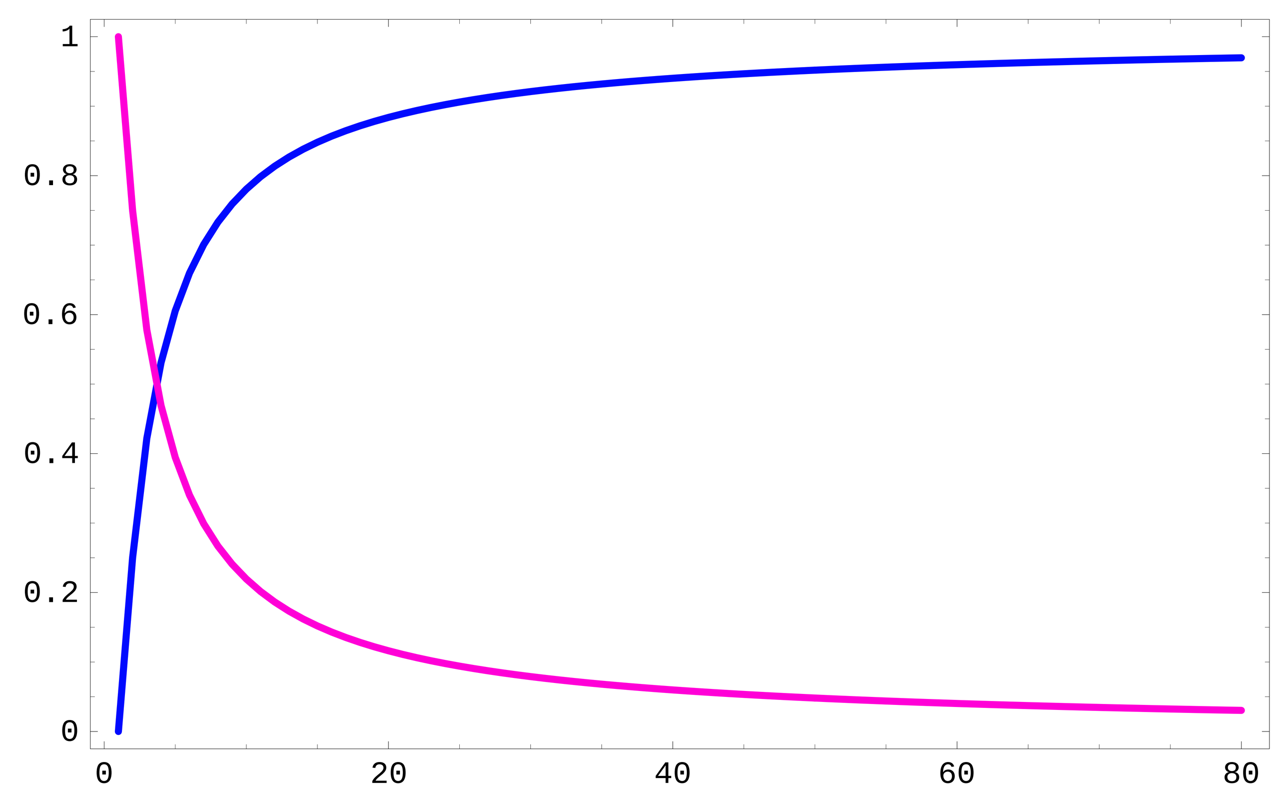
Après un passage, on a : $B(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{avec } P = \cos^2\theta \\ \text{Explosion avec } P = \sin^2\theta \end{cases}$



Quand une bombe est présente, le vecteur tournant est reprojeté sur l'état α après chaque passage, si elle n'a pas explosé.

Après N passage, on a : $B^N(\alpha) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{avec } P = \cos^{2N}\frac{\pi}{2N} \\ \text{Explosion sinon} \end{cases}$

Et la probabilité de détection tend vers 1 : $\lim_{N\to\infty} \cos^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right) = 1$. On peut donc savoir avec une **probabilité arbitrairement proche de 1** si la bombe est armée !



Sur ce graphique, on a la probabilité de détection et la probabilité d'explosion en fonction du nombre **N** de cycles.