DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES
PRINTEMPS DES SCIENCES 2003

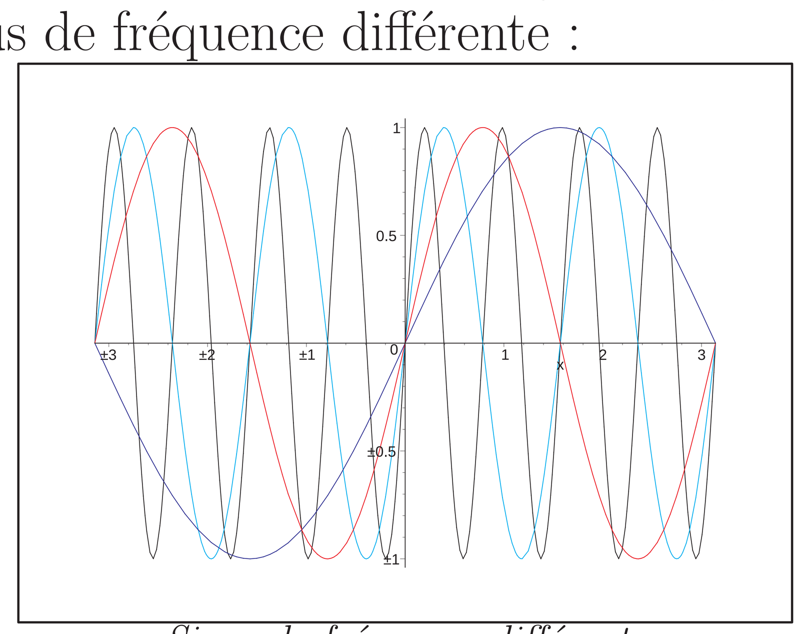
Les Ondelettes :

L'Analyse de Fourier

Présentation : Demaeyer Jonathan, Bebronne Michael et Forthomme Sébastien

Un outil de tous les jours :

L'analyse de Fourier est un outil de traitement du signal utilisé par de nombreux appareils dans la vie courante. Elle permet de décomposer un signal en sinus et en cosinus qui correspondent chacun à une fréquence donnée. On peut ainsi analyser le contenu fréquentiel de ce signal, et ensuite le travailler où l'analyser en profondeur. Voici par exemple des sinus de fréquence différente :

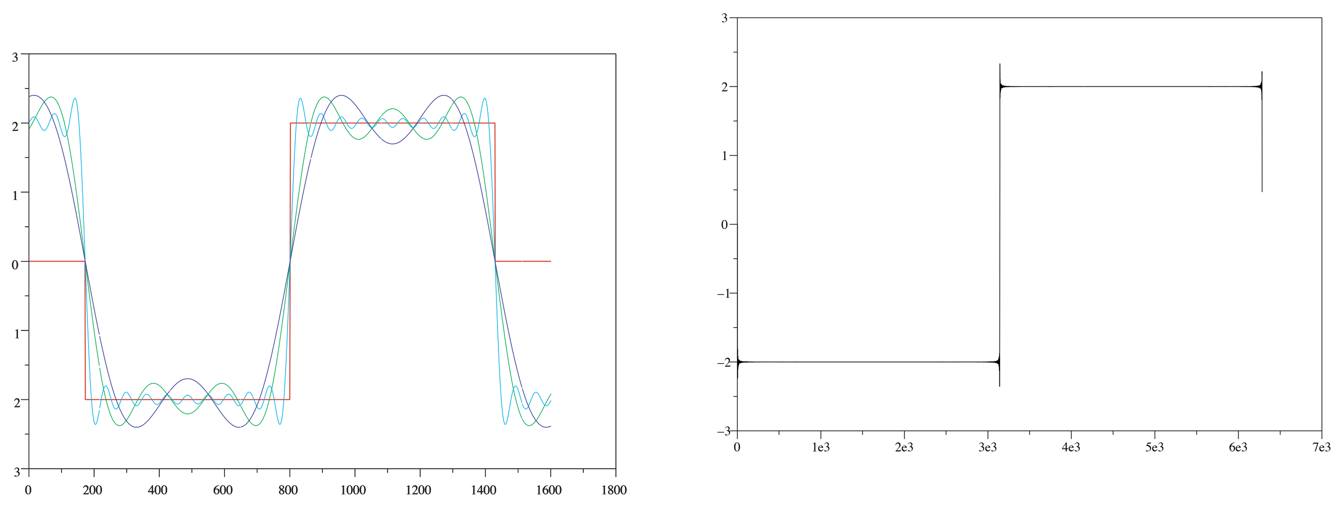


Sinus de fréquence différente

La théorie affirme que tout signal périodique peut être obtenu en sommant des sinus et des cosinus de fréquence différente. La série de Fourier d'une fonction périodique représente alors le signal :

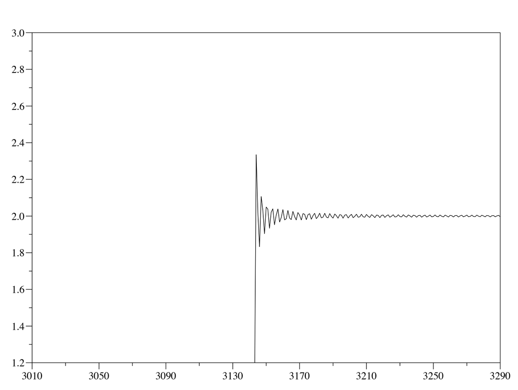
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

Les a_n et les b_n dépendent de la fonction f qu'on analyse. Voici par exemple la décomposition d'un signal de type onde carré (comme par exemple le signal d'un clignoteur de voiture) :



Série de Fourier d'un signal carré

On peut observer alors le curieux phénomène des oscillations Gibbs autour des discontinuités (changement brusque du signal) lorsque l'on somme un grand nombre de fois l'expression ci-dessus :



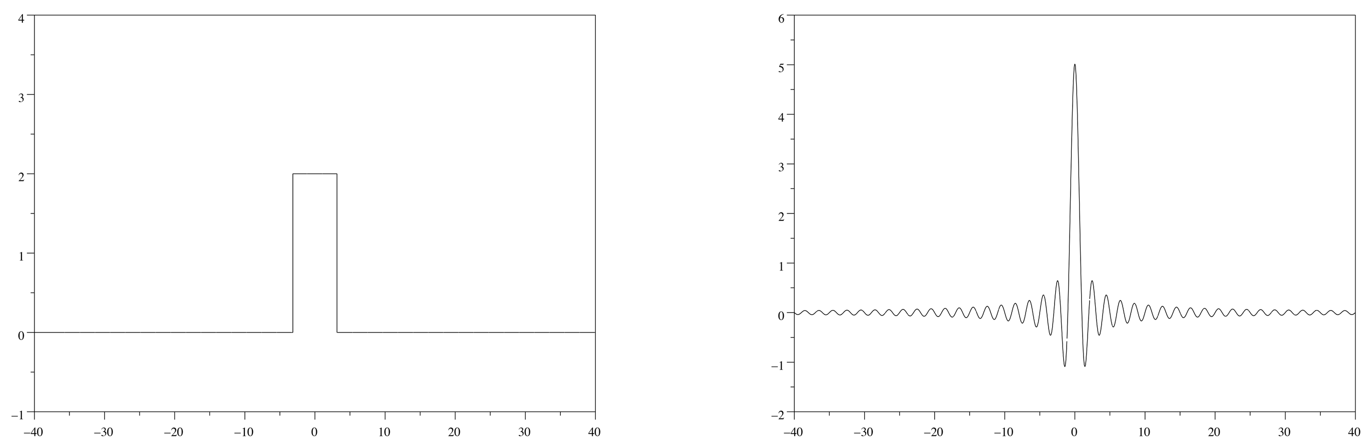
Oscillations de Gibbs

Transformée de Fourier :

Si le signal n'est pas périodique, alors par un procédé intuitif de passage à la limite, on analyse le signal de manière continue avec une transformée de Fourier. Celle-ci s'écrit comme suit :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t}dt$$

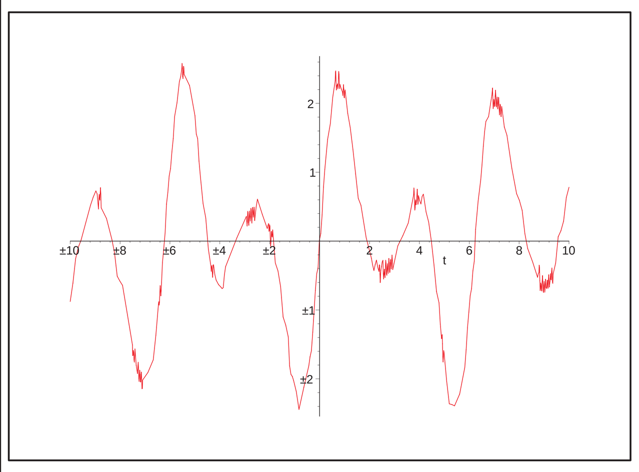
où ν est la fréquence (qu'on peut mesurer physiquement en hertz). On a ainsi une décomposition continue des fréquences contenue dans le signal. Par exemple pour une marche on a :



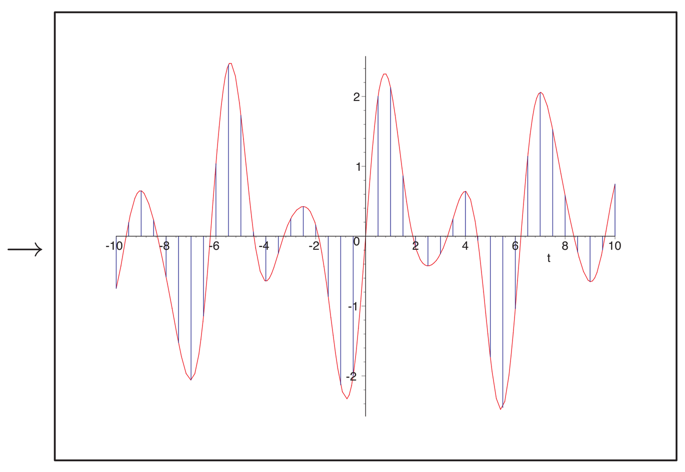
Un signal et sa transformée de Fourier

Théorème de Shannon :

Si on passe un signal quelconque dans un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_0 alors seulement $2f_0$ points sont nécessaire pour obtenir une représentation complète du signal à la sortie du filtre. Cette notion est très important lorsque l'on traite un signal, elle dit que cela ne sert à rien de prendre une énorme quantité d'information et elle fixe la quantité nécessaire. Par exemple, prenons un signal et passons le dans un filtre passe-bas de fréquence de coupure entière ω :



filtre passe-bas →



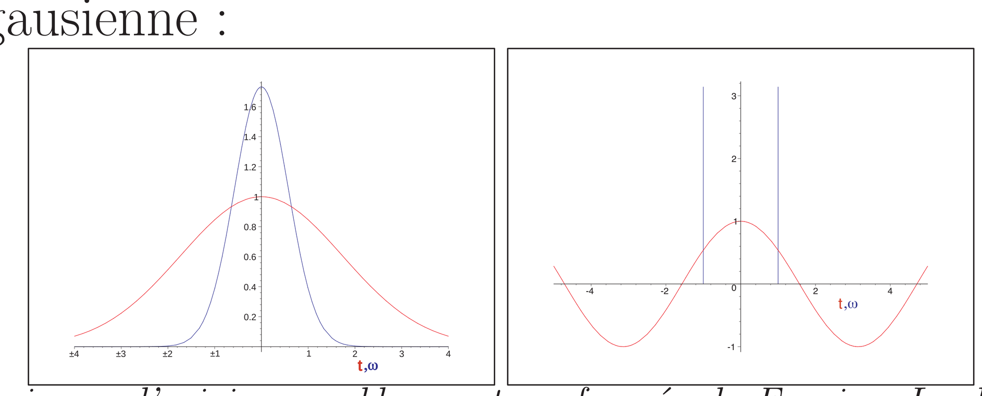
On peut facilement se convaincre qu'en prenant les points $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2\omega}\}$, on pourrait reconstruire le signal en les reliant.

Principe d'incertitude de Heisenberg :

Le principe d'incertitude vient de la mécanique quantique, mais il joue un grand rôle dans le traitement du signal. Il stipule que l'on ne peut localiser aussi précisément que l'on veut en temps et en fréquence un signal. Mathématiquement, on écrit que la moyenne des fluctuations en temps et en fréquence est bornée inférieurement :

$$\sigma_t^2\,\sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}$$

On peut illustrer cette formule par une fonction particulière appelée gaussienne, et qui à la particularité que sa transformée de Fourier est encore une gausienne :



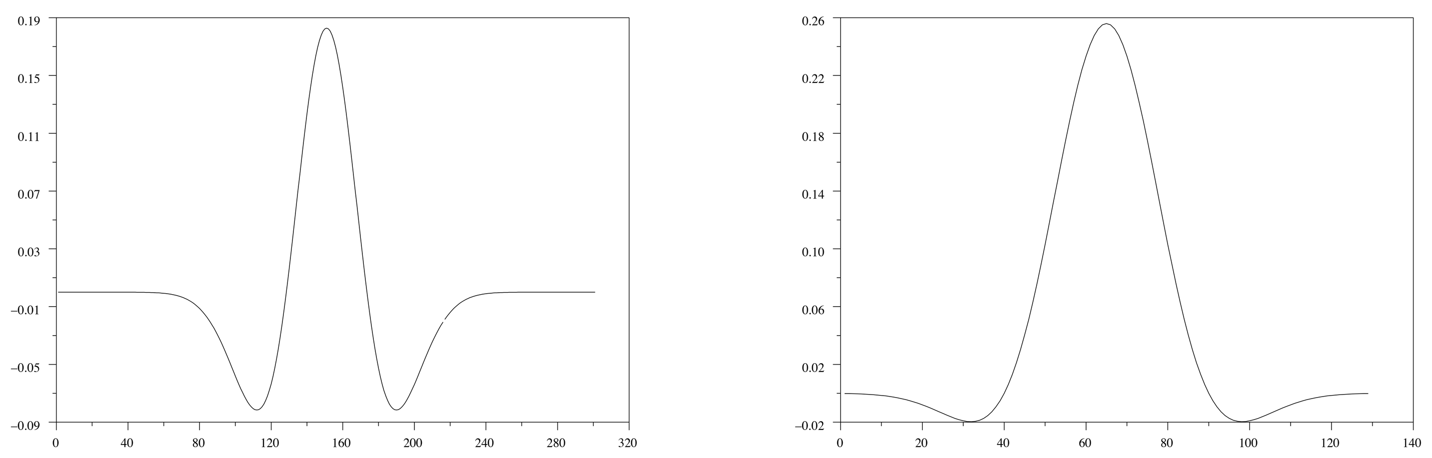
En rouge, la gausienne d'origine, en bleu sa transformée de Fourier. La différence entre les deux largeurs montre bien le principe : "Au plus on localise en temps, au moins on localise en fréquence" . On peut montrer que la gaussienne à la particularité que $\sigma_t^2\,\sigma_\omega^2 = \frac{1}{4}$. La deuxième figure montre un cosinus et sa transformée. On peut remarquer que la transformée est localisée très précisément en fréquence, ce qui découle du fait qu'une sinusoïde est décomposée en une fréquence qui est sa fréquence propre.

LES ONDELETTES :

Un nouvel outil

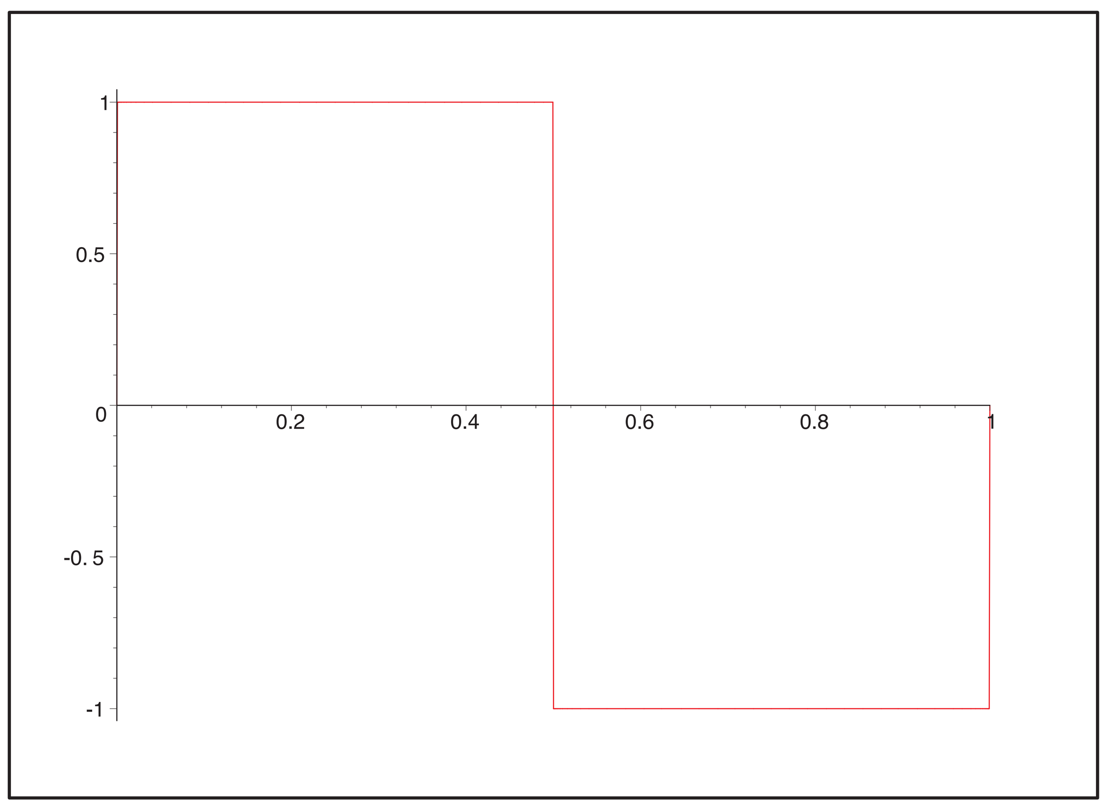
A quoi ressemble une ondelette

Les ondelettes permettent, comme les sinus et les cosinus, de décomposer un signal. Les ondelettes sont localisées en temps et en fréquence. Le caractère localisé de l'ondelette s'exprime par le fait que la fonction est non nulle sur un intervalle fini et nulle partout ailleurs. Avec les ondelettes, on sait donc en quelques sorte quand un événement se produit et comment il se produit, avec une certaine incertitude due au principe d'Heisenberg que l'on peut néanmoins fixer de manière arbitraire. Les ondelettes sont des dilatations (dilater est ici à prendre dans le sens étirer **et** comprimer !) et des translations d'une ondelette initiale que l'on nomme ondelette mère.



Ondelette 'mère' Chapeau Mexicain et de Morlet

Suivant ce que l'on désire réaliser avec le signal, on utilise différents types d'ondelette mère. Par exemple, les ondelettes peuvent compresser de manière sensible et sans trop de perte une image (l'image est un signal carré en deux dimensions). On utilise alors une onde *mère* carrée appelée *ondelette de Haar* qui code en **quelques** coefficients le signal de l'image (Voir l'affiche suivante). Ci-dessous est représenté l'ondelette de Haar :



Ondelette 'mère' de Haar

Les ondelettes sont donc des fonctions

$$\psi_{s,\tau} = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\psi(\frac{t-\tau}{s})$$

où ψ est l'ondelette mère. ψ doit être de moyenne nulle[1], centrée au voisinage de 0 et d'énergie finie[2].

La transformée en ondelette

La transformée en ondelettes est similaire à celle de Fourier et s'écrit :

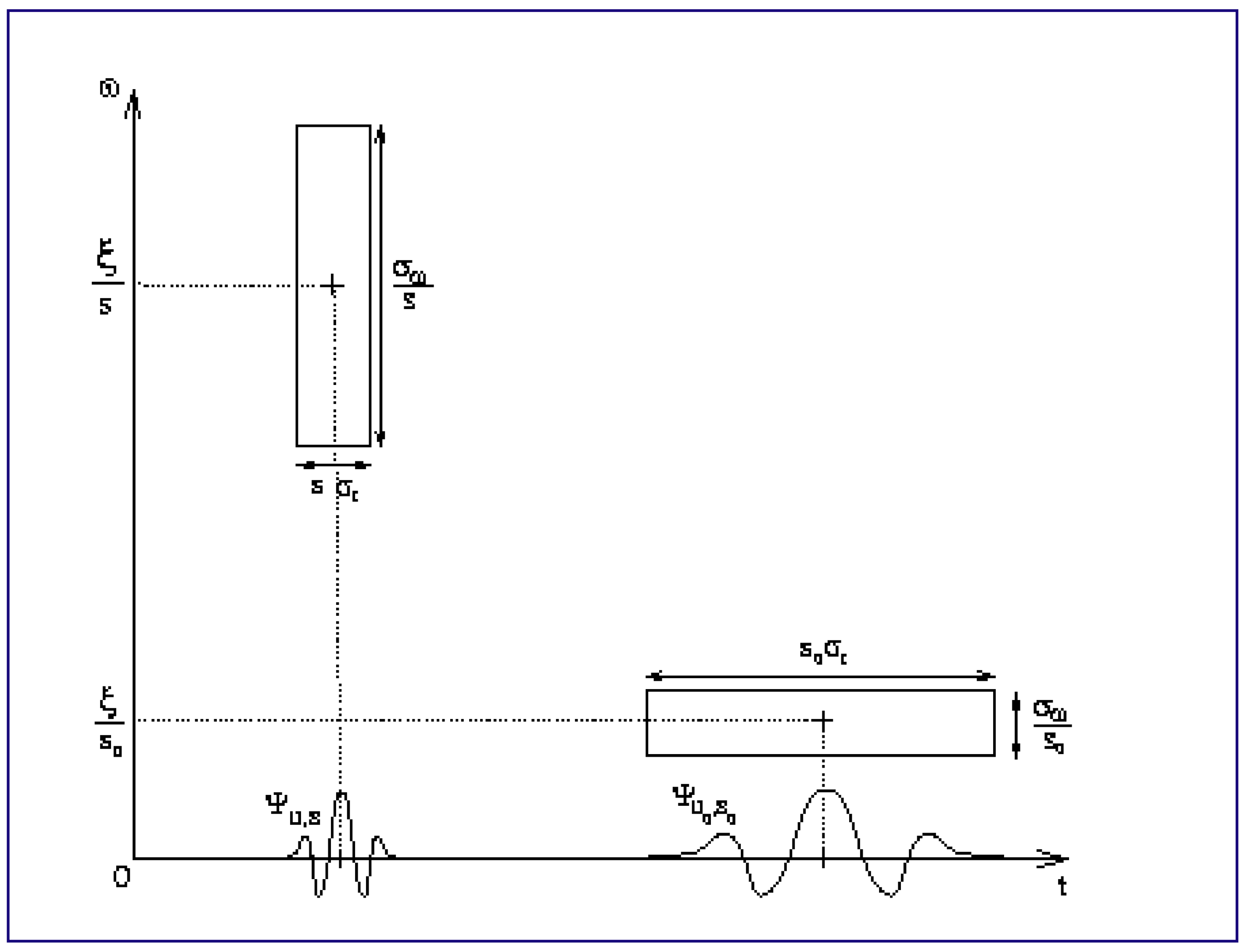
$$\gamma(s,\tau) = \int f(t)\psi^*_{s,\tau}(t)\ dt$$

La transformée prend les deux arguments s et τ qui sont respectivement des coefficients de translation et de dilatation. En faisant varier ces arguments, on peut couvrir complètement le plan temps-fréquence avec des *boîtes* ; on obtient ainsi une représentation complète et redondante du signal à analyser.

Avantages et applications

Le fait que la transformée utilise des fonctions bien localisées dans le plan temps-fréquence lui donne beaucoup d'avantages.

- La résolution en fréquence de la transformée dépend du facteur de dilatation s par le principe d'Heisenberg, on peut donc choisir arbitrairement celle-ci suivant ce que l'on désire analyser.
- Pour des signaux physiques présentant des variations très rapides, des sauts, des *marches*, bref des discontinuités ; l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces singularités et analyser celles-ci. Cette particularité rend l'analyse en ondelettes complémentaires à l'analyse de Fourier. En effet, avec cette dernière, les discontinuités d'un signal ne sont pas facilement analysables, car les coefficients des fréquences correspondantes sont étalés dans toute la transformée.
- On peut représenter complètement et efficacement un signal quelconque en peu de coefficients.[3]



Le plan temps-fréquence et les boîtes d'Heisenberg

`http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation`

---

[1] $\int \psi(t)dt = 0$, ou en d'autre mot ψ doit être une onde.

[2] $\int |\psi(t)|^2 dt < +\infty$, ψ doit donc être de carrée sommable

[3] Un critère d'efficacité de la représentation est la quantité d'énergie conservée par la transformée.
Dans la pratique, on fait un compromis entre la quantité d'énergie conservée et le nombre de coefficients, donc entre la qualité et la quantité d'information.

Les Ondelettes :

La multirésolution

Dans la multirésolution on examine le signal à résolution grossière, à l'aide d'ondelettes larges, et d'un petit nombre de coefficients, pour en tracer l'ébauche, ensuite on analyse aux résolutions fines, en utilisant un grand nombre de petites ondelettes, qui scrutent les détails. De cette manière les ondelettes s'adaptent automatiquement aux différentes composantes du signal : elles utilisent une fenêtre étroite pour regarder les composantes transitoires de haute fréquence, et une fenêtre large pour regarder les composantes de longue durée, de basses fréquences.

Construction d'une multirésolution

La fonction d'échelle :

Nous écrivons la fonction d'échelle comme la combinaison de ses translatées à la résolution deux fois plus fine, chaque translatée étant affectée d'un coefficient.

$$\phi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n 2\phi(2x - n)$$

L'ondelette :

On peut déduire directement l'ondelette de la fonction d'échelle

$$\Phi(t) = 2\sum_{-\infty}^{\infty} d_n 2\Phi(2t - n)$$

Dans ce cas nous avons déduit l'ondelette directement à partir de la fonction d'échelle.

Dans le cas de la fonction de Haar, nous savons que :

$$\Phi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - n)$$

c'est-à-dire

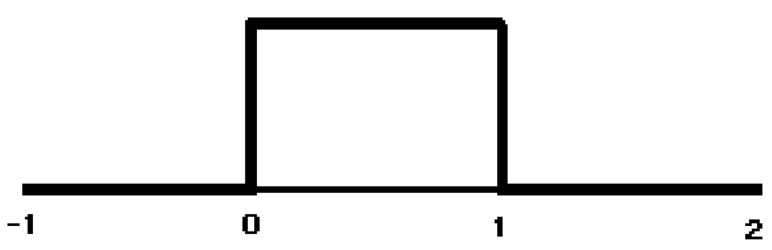
$\Phi(t) = 1$ si $0 < \text{t} < \frac{1}{2}$

$\Phi(t) = -1$ si $\frac{1}{2} < \text{t} < 1$

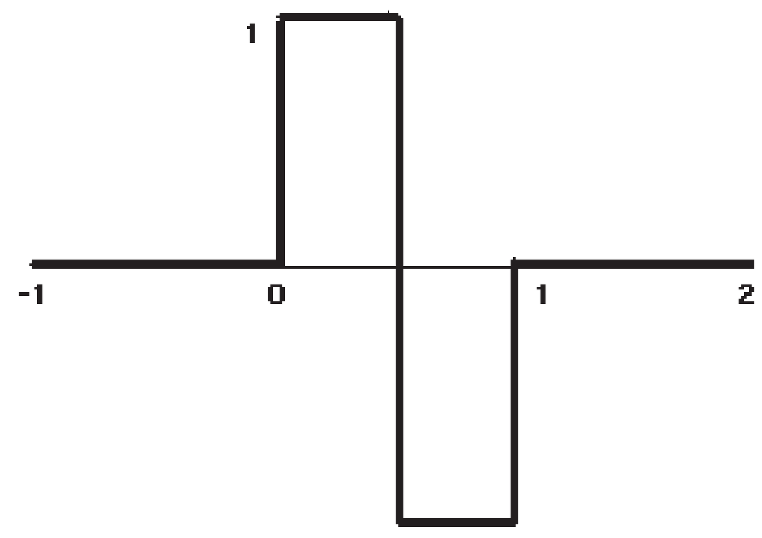
$\Phi(t) = 0$ sinon

Les coefficients d_n sont $\text{d}_0 = \frac{1}{2}$ et $\text{d}_1 = -\frac{1}{2}$

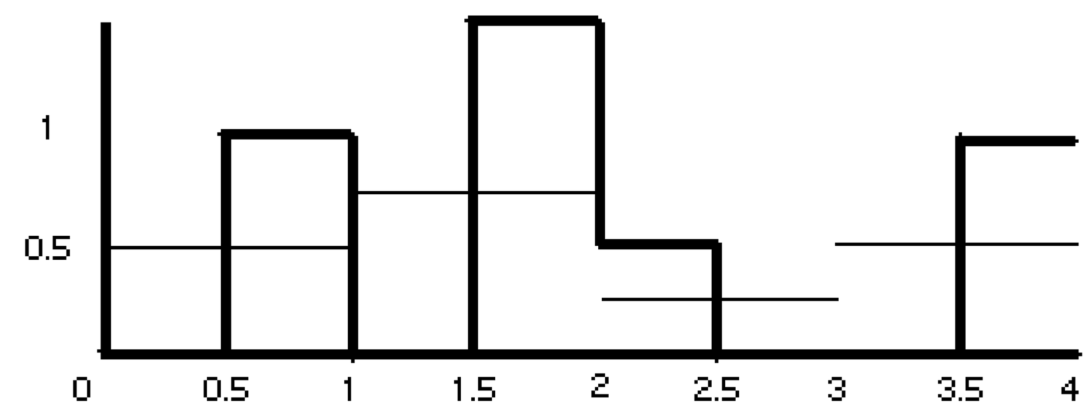
L'exemple de Haar



La fonction d'échelle de Haar



L'ondelette de Haar



Un signal (traits gras) et son approximation par la fonction d'échelle de Haar (traits fins)

Chaque coefficient de la fonction d'échelle est donné par l'intégrale du produit du signal par la fonction d'échelle. Dans notre exemple, elle donne les valeurs moyennes pour chacun des quatres intervalles [0,1] [1,2] [2,3] [3,4].

Image du signal	0	1	0	1.5	0.5	0	0	1
Coefficient d'echelle	0.5		0.75		0.25		0.5	
Coefficient d'ondelette	-0.5		-0.75		0.25		-0.5	

Les coefficients des ondelettes contiennent donc l'information qu'on doit ajouter à celle encodée par la fonction d'échelle pour retrouver le signal à une résolution 2 X plus fine

Interprétation de la fonction d'échelle

Elle donne une suite d'images du signal, chacune á des résolutione qui diffèree de la précédente par un facteur deux, quand on augmente la résolution, les images successives approximent le signal de mieux en mieux, quand on la diminue, la quantité d'information contenue dans les images diminue, puis s'annule. Elle détermine donc la résolution la plus fine à laquelle on étudie le signal.

L'ondelette, un outil puissant

Les ondelettes encodent la différence d'information entre deux images successives, c'est à dire les détails qu'une image acquiert quand on augmente ou diminue sa résolution. Un signal peut être composé de structures de tailles très différentes. Une analyse à plusieurs résolutions est donc particulièrement adéquate.

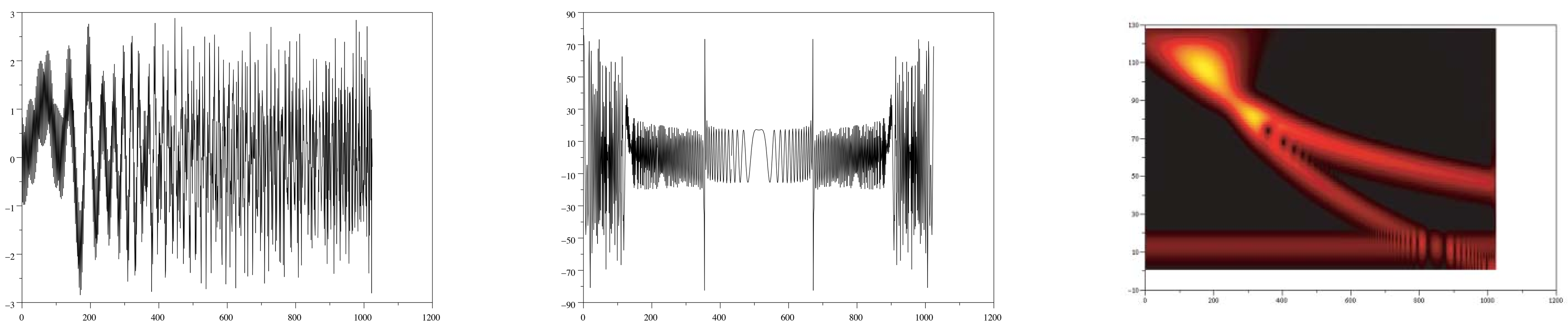
Algorithme

Au lieu de décomposer le signal en ondelettes en le comparant à chaque échelles , aux ondelettes de tailles appropriées, on commence par étudier le signal à la résolution la plus fine, qui constitue le point de départ. On commence par séparer le signal en deux composantes : l'allure générale du signal, et l'ensemble des petits détails. L'image lisse est le signal tel qu'on le voit à la moitié de la résolution la plus fine, avec deux fois moins d'échantillons. On obtient cette image à l'aide de la fonction d'échelle (filtre passe-bas). Les détails encodés par les ondelettes sont les retouches qu'il faut apporter à l'image lisse pour reconstituer le signal initial, on les obtient à l'aide d'un filtre passe-haut . L'algorithme consiste à répéter la procédure à une résolution demie de la précédente tant que le signal n'a pas perdu sa substance.

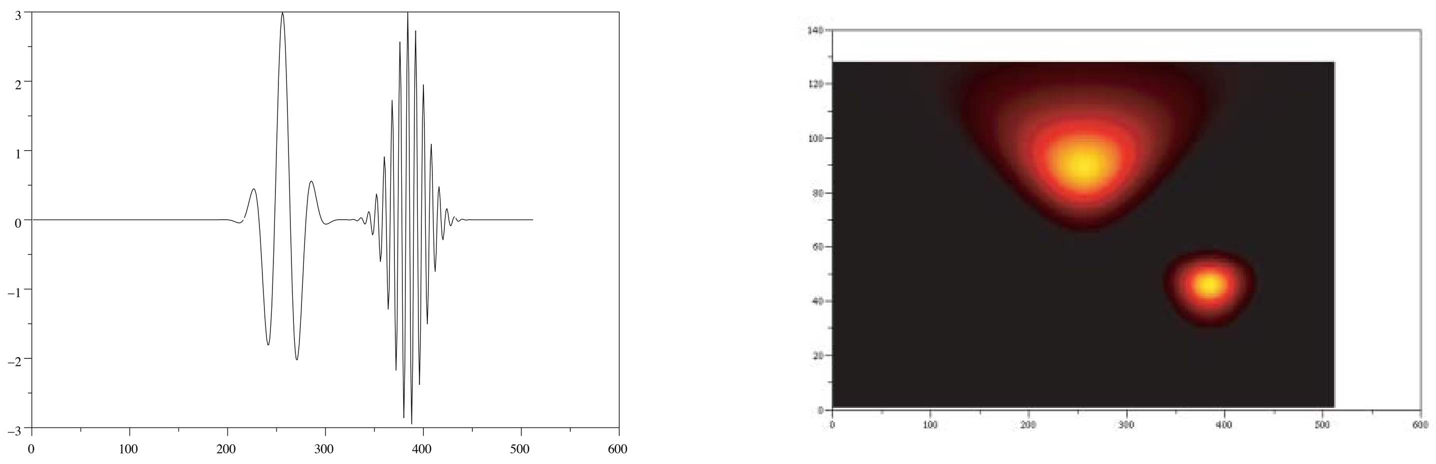
Les Ondelettes :

Illustrations

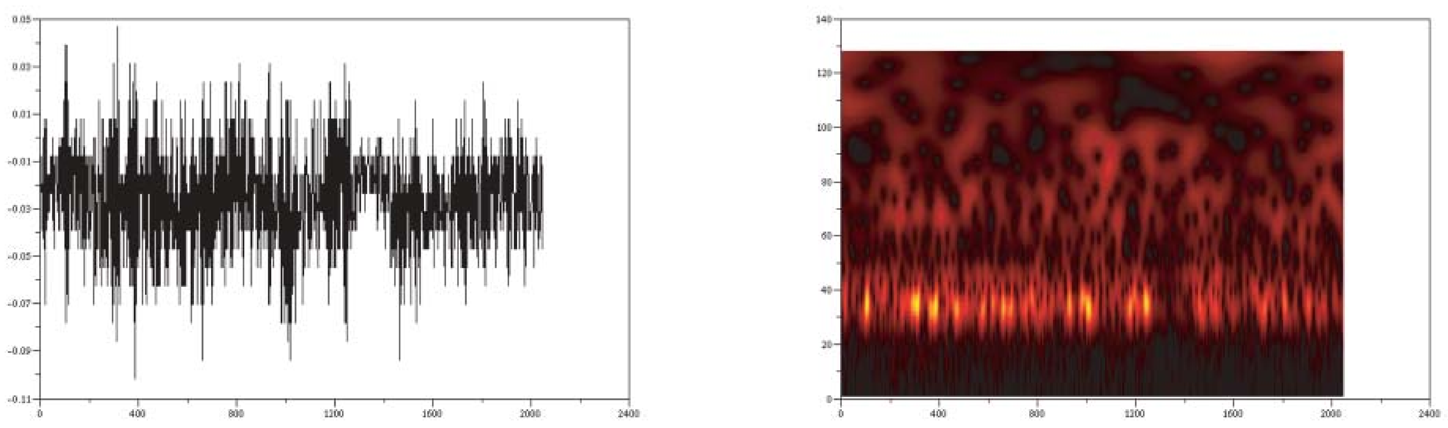
Les ondelettes ont de multiples applications. Que se soit en traitement du signal, en compression d'images (JPEG 2000), en mathématique, en océanographie, dans la recherche du pétrole, dans la modélisation de signaux neuronaux, ... les ondelettes sont un outil puissant.



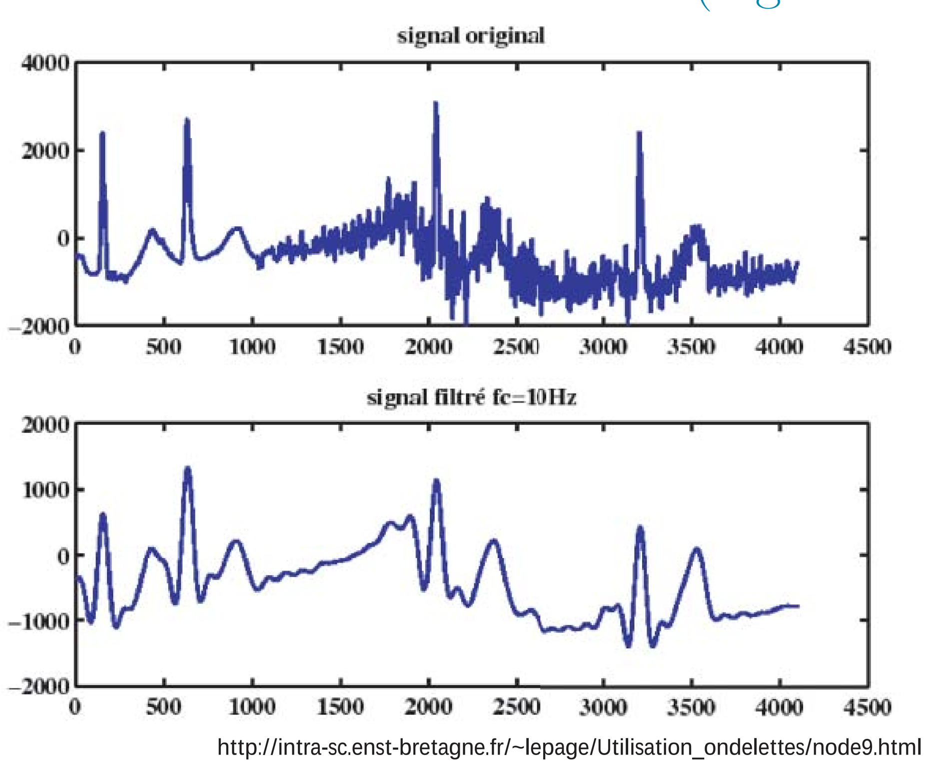
(Voici un signal quelconque qui va être traité par transformée de Fourier et par l'ondelette de Morlet.)



(Signal et sa transformée en ondelette de Morlet.)

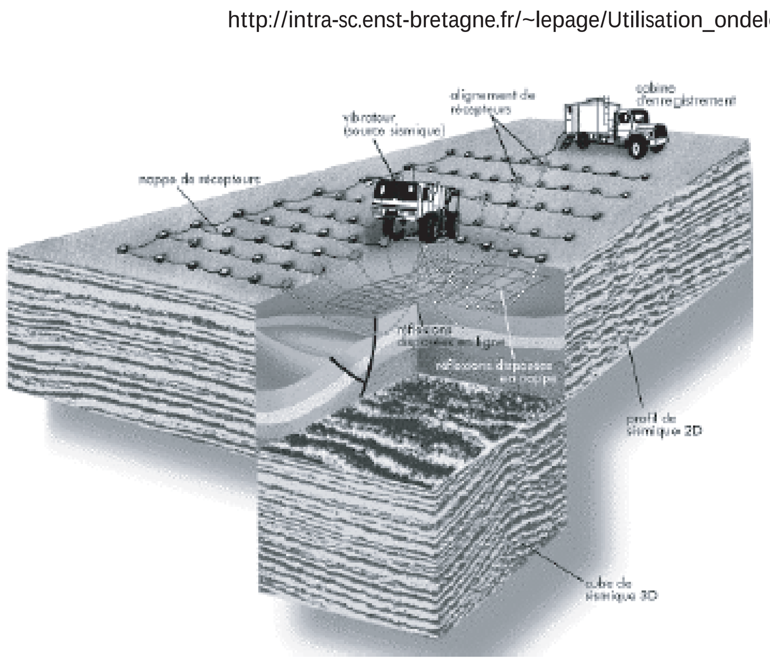


(Signal sonore émit par un orque et se transformée en ondelette de Morlet.)

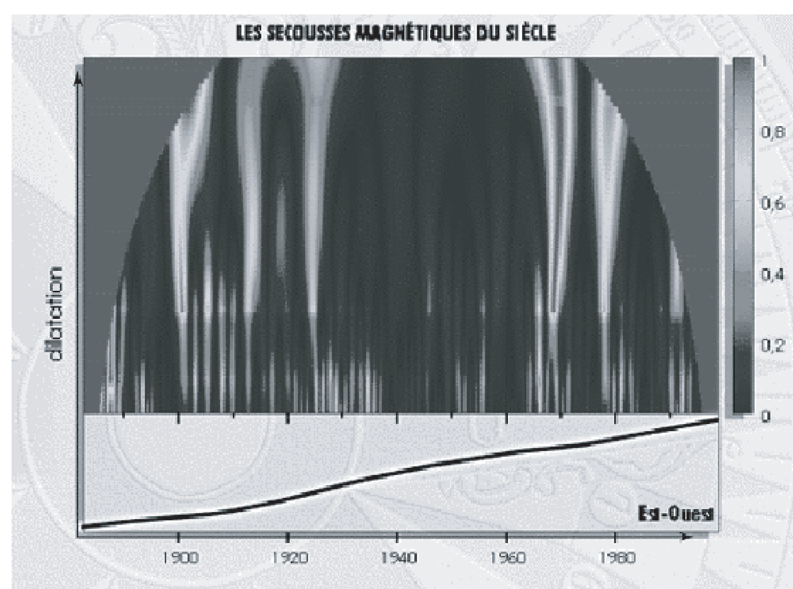


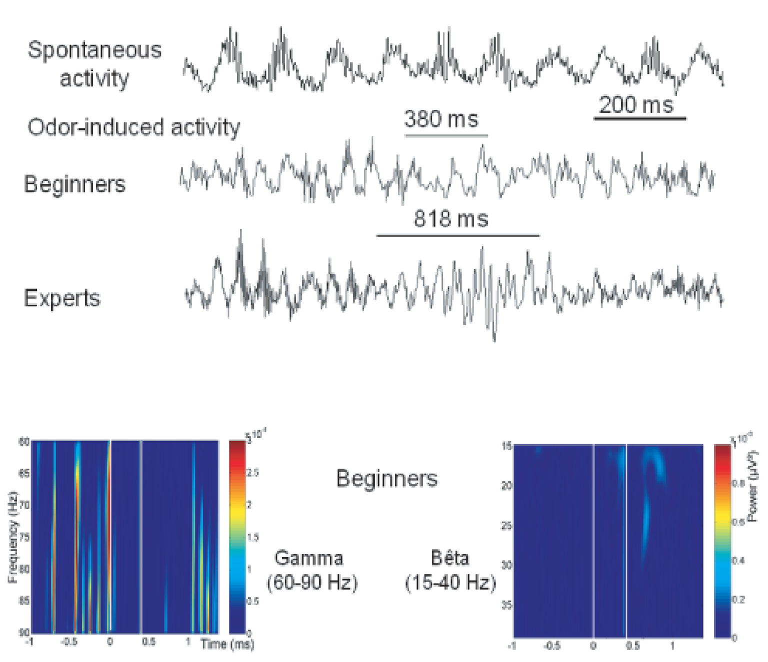
(À gauche : Signal ECG et résultats du filtrage par filtre de Butterworth fc=10Hz)
(À droite : Déconvolution et débruitage : Image original, Image dégradée et Image reconstituée)

http://www.inria.fr/rapportsactivite/RA96/pastis/node23.html

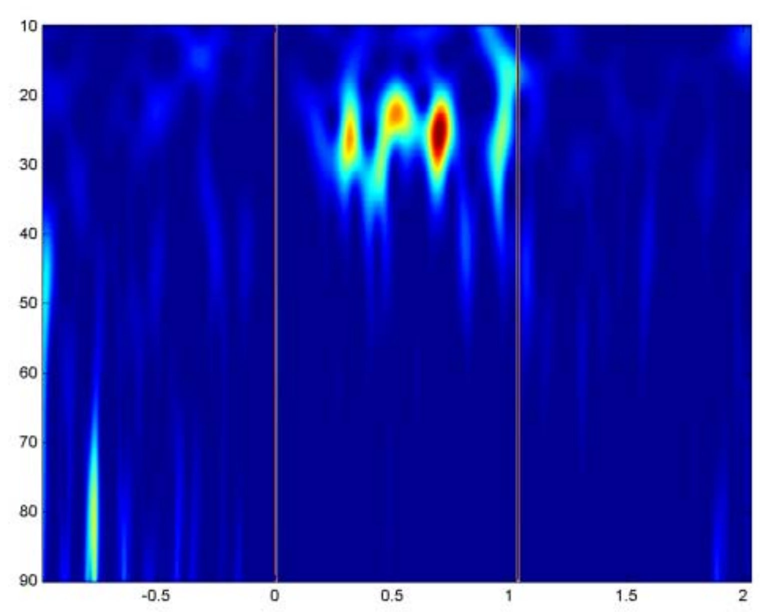


À gauche : Suivre le pétrole à la trace.
À droite : Les secousses magnétiques du siècle.
Illustration tirée de *Traitement du signal par ondelette, Régis Décamps*
http ://faq.maths.free.fr/tipe/ondelettes.pdf





Les Ondelettes en neurophysiologie : Etude du rapport fonctionnel de deux différentes activités oscillatoires beta et gamma (14-40Hz et 60-90 Hz, respectivement) de la perception, et du processus de mémorisation dans les aires olfactives chez les mammifères.

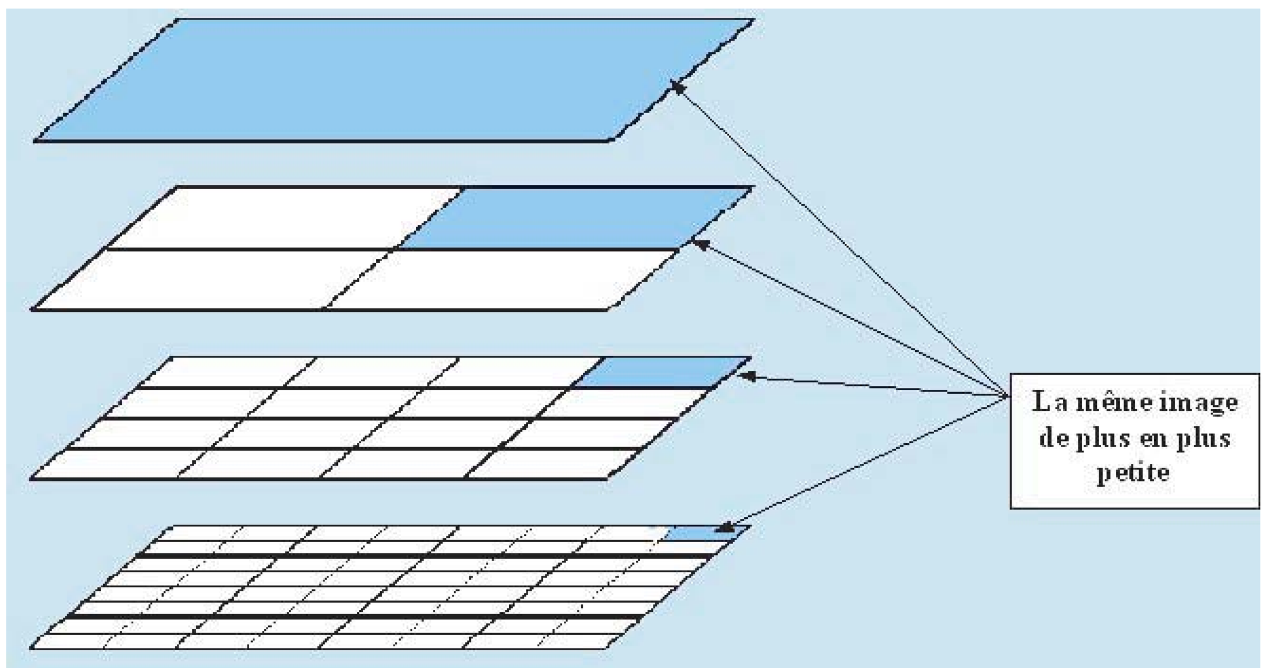


Les Ondelettes :

Le JPEG 2000

Avec l'utilisation grandissante des technologies multimédias, la compression d'images nécessite des performances de plus en plus exceptionnelles. Récemment, les techniques de compression d'images ont subi une véritable révolution. En effet, la compression à l'aide d'ondelettes à permit de réduire sensiblement la quantité d'information nécessaire pour stocker une image de très bonne qualité.

Comme vu précédemment, l'Analyse Multirésolution permet, par filtrage successif, de produire une série de signaux correspondant à une résolution de plus en plus fine du signal, c'est à dire à des fréquences de plus en plus basses.

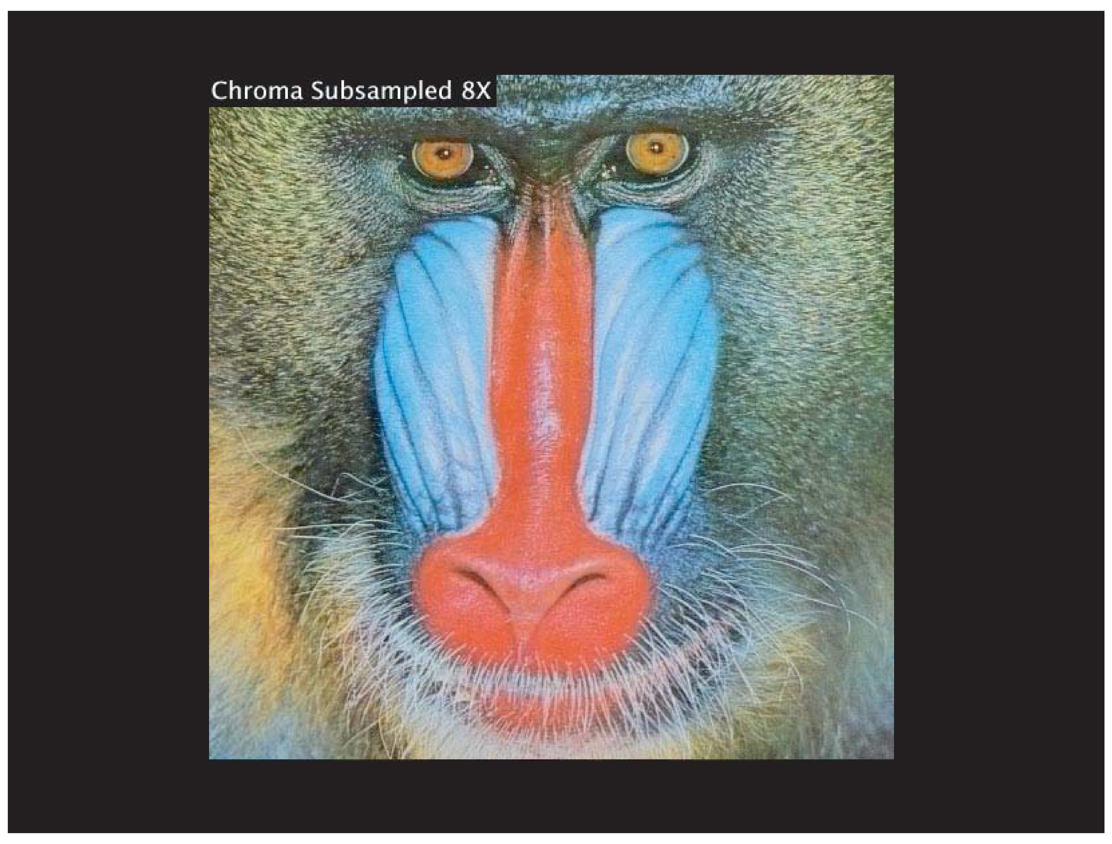


Ce qui va se passer, c'est qu'on sépare le signal en deux composantes, l'une représentant l'allure générale du signal, l'autre représentant ses détails. L'allure générale d'une fonction est représentée par ses basses fréquences, les détails par ses hautes fréquences.

Nous avons donc besoin d'une paire de filtres : un passe-bas pour obtenir l'allure générale, et un passe-haut pour estimer ses détails. Attention : ces deux filtres doivent bien sûr être complémentaires ; les fréquences coupées par l'un doivent être conservées par l'autre !

C'est ici qu'interviennent les ondelettes : à chaque paire de filtres est associé une ondelette et une fonction d'échelle .

Compression *classique* et compression par Ondelettes



(a) (b)

Fig. 20. Reconstructed images compressed at 0.125 bpp by means of (a) JPEG and (b) JPEG2000

(a) (b)

Fig. 21. Reconstructed images compressed at 0.25 bpp by means of (a) JPEG and (b) JPEG2000

Affiche inspirée de : `www.essi.fr/SSI/SSI/TL.2001/Gr1/lrpd/pages/ondelettes/accueil_onde.html`

Avec l'aide du laboratoire de Résonance magnétique nucléaire et les conseils de Jean-Louis Colot, Francis Masin et Pascal Pirotte.