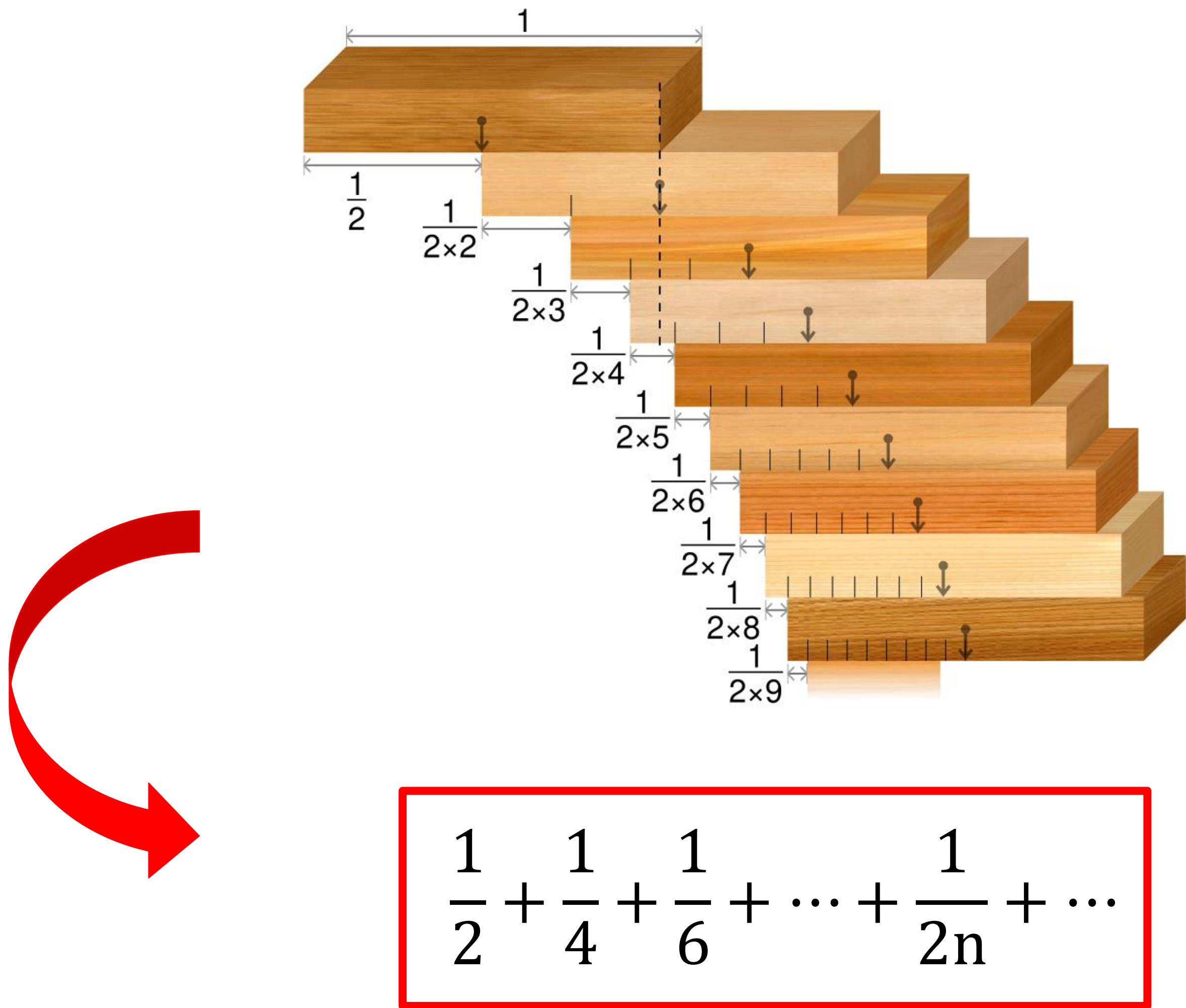


UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Mohamed BENJELLOUN, Carla CHANCUSI AGUAS, Maxime LECOCQ DE PLETINCX, Marco LORUSSO-FAVIA, Imane BEN LARBI

Quelle est la longueur maximale que peut atteindre un pont construit de blocs de kaplas ?



Elle est directement liée à la **série harmonique** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

Théorème :

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vaut l'infini.

Démonstration :

Supposons par l'absurde que la série converge vers une somme S. Alors

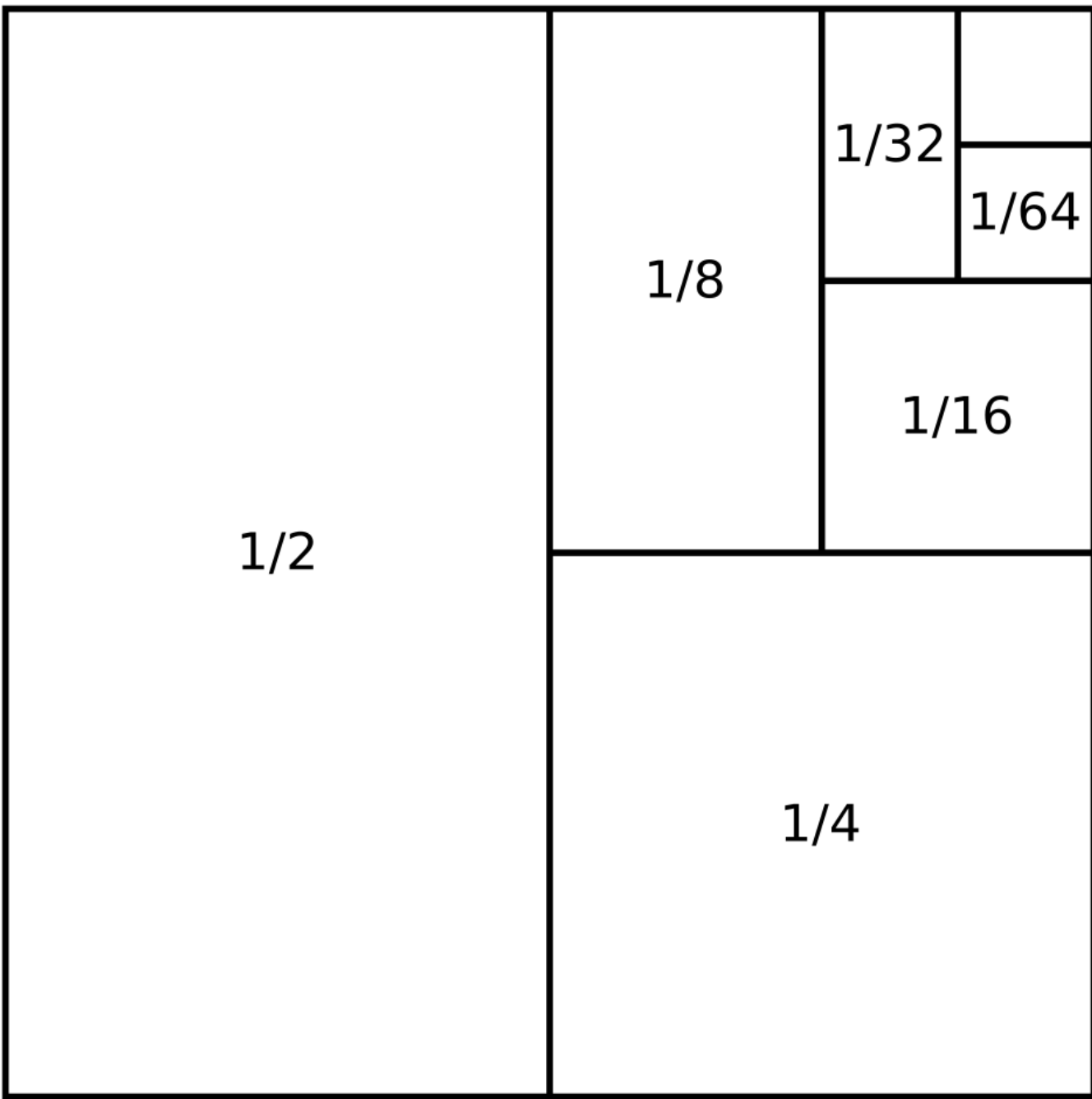
$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &= S \end{aligned}$$

La contradiction $S > S$ permet de conclure.

⇒ Le pont pourrait avoir une longueur infinie si l'on place les blocs correctement.

Définition :

Une série $\sum_n a_n$ est **convergente** si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (tend vers un nombre réel). Sinon, elle est dite **divergente**.



C'est une **série géométrique** convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Théorème de réarrangement de Riemann :

Soit $(a_k) \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sum_k a_k$ converge mais ne converge pas absolument, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe un réarrangement de la série dont la somme vaut s . De plus, il existe un réarrangement divergent.

Un exemple est la **série alternée harmonique** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

⇒ L'ordre des termes peut modifier complètement le comportement d'une série.

Source image: Block stacking problem.svg. (2023, November 30). Wikimedia Commons. Retrieved March 3, 2026, from https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Block_stacking_problem.svg&oldid=826512590

Source image: Eye of Horus square.svg. (2025, July 29). Wikimedia Commons. Retrieved March 3, 2026, from https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eye_of_Horus_square.svg&oldid=1062639364

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Mohamed BENJELLOUN, Carla CHANCUSI AGUAS, Maxime LECOCQ DE PLETINCX, Marco LORUSSO-FAVIA, Imane BEN LARBI

Infinis potentiel et actuel :

Infini potentiel : Infini qui ne peut être atteint.

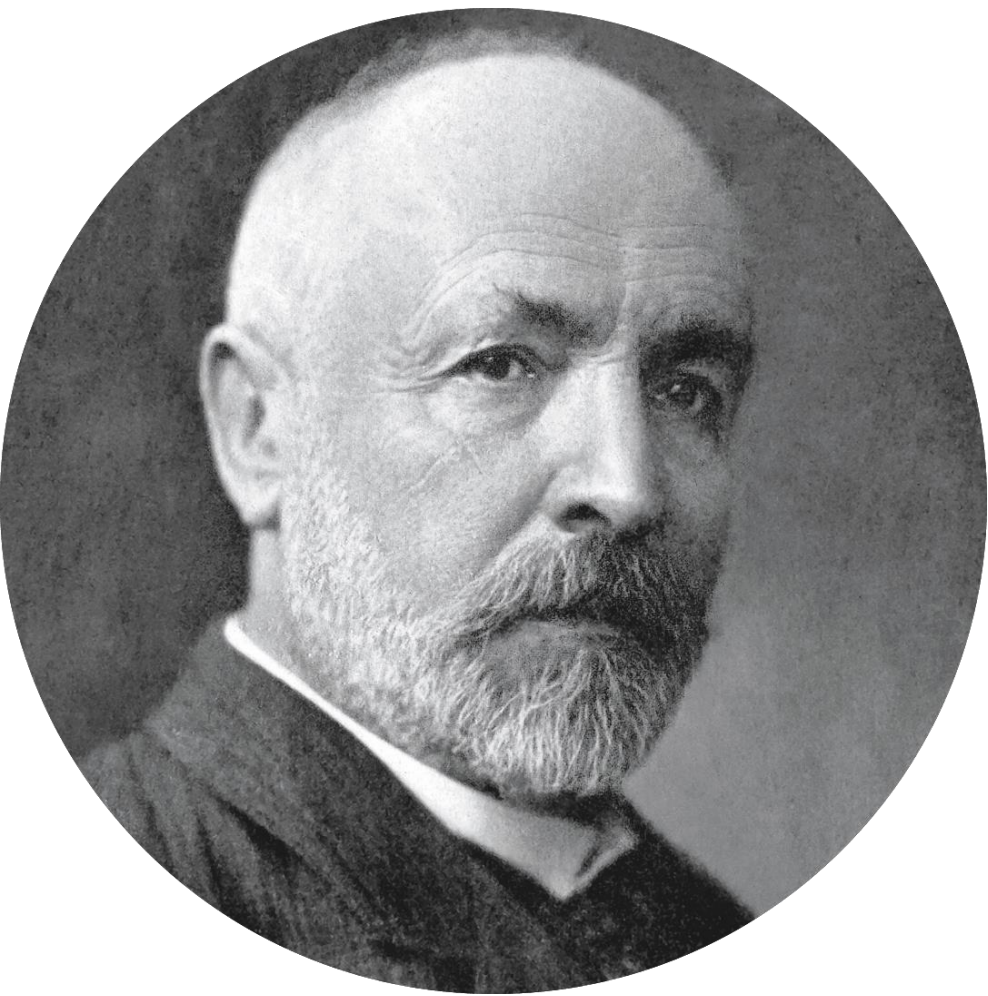
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, ...

Infini actuel : Cardinalité d'un ensemble d'éléments considéré comme un objet mathématique complet.

$|\mathbb{N}|$ $|\mathbb{Q}|$ $|\mathbb{Z}|$ $|\mathbb{R}|$

Motivations :

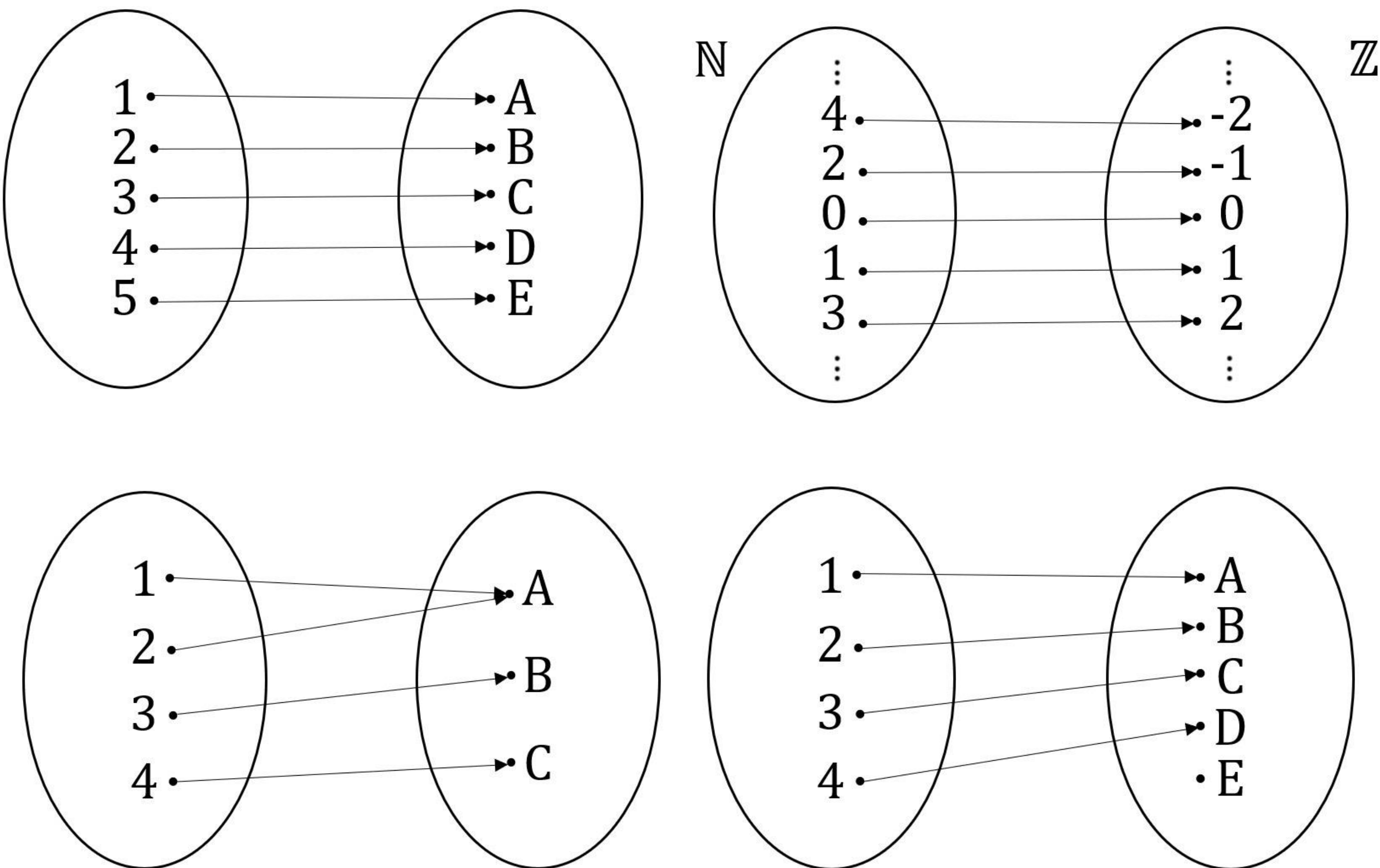
Il y a 200 ans, l'infini potentiel était fréquemment manipulé alors que l'infini actuel était considéré tabou.



Cantor (1845-1918)

Définition :

Une **bijection** entre deux ensembles est une fonction qui associe chaque élément d'un ensemble à un et un seul élément de l'autre, et vice-versa.



Diagonale de Cantor :

On suppose qu'on peut lister tous les nombres réels dans l'intervalle $[0,1[$:

X_1	=	0	,	1	1	3	8	4	3	9	...
X_2	=	0	,	0	8	4	2	9	2	4	...
X_3	=	0	,	7	4	2	6	7	4	9	...
X_4	=	0	,	5	3	6	9	0	1	3	...
X_5	=	0	,	8	9	4	0	2	0	5	...
X_6	=	0	,	5	9	0	3	5	1	8	...
X_7	=	0	,	9	9	4	9	2	0	1	...
$\vdots$											
X	=	0	,	2	9	3	0	3	2	2	...

Nous prenons la diagonale et nous rajoutons 1 à chaque chiffre.

On retrouve un réel qui ne se retrouve pas dans notre liste.

On ne peut lister les nombres réels par les nombres naturels.

Pas de bijection entre les nombres naturels et réels.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

Existe-t-il un infini qui serait le plus grand de tous les infinis ?

$X = \{ \text{chien}, \text{chat} \}$

$P(X) = \{ \{ \text{chien} \}, \{ \text{chat} \}, \{ \text{chien}, \text{chat} \}, \emptyset \}$

Théorème de Cantor :

Pour tout ensemble E, l'ensemble des parties P(E) est strictement plus grand que E lui-même.

Source image: Synthèse | Lelivrescolaire.fr

Source image: Argument de la diagonale de Cantor — Wikipédia Un type de chien avec vue de face en élévation du visage heureux | Image Premium générée à base d'IA Tierarztpraxis Dr. Oliver Beger • Tierarzt Dresden Cossebaude

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

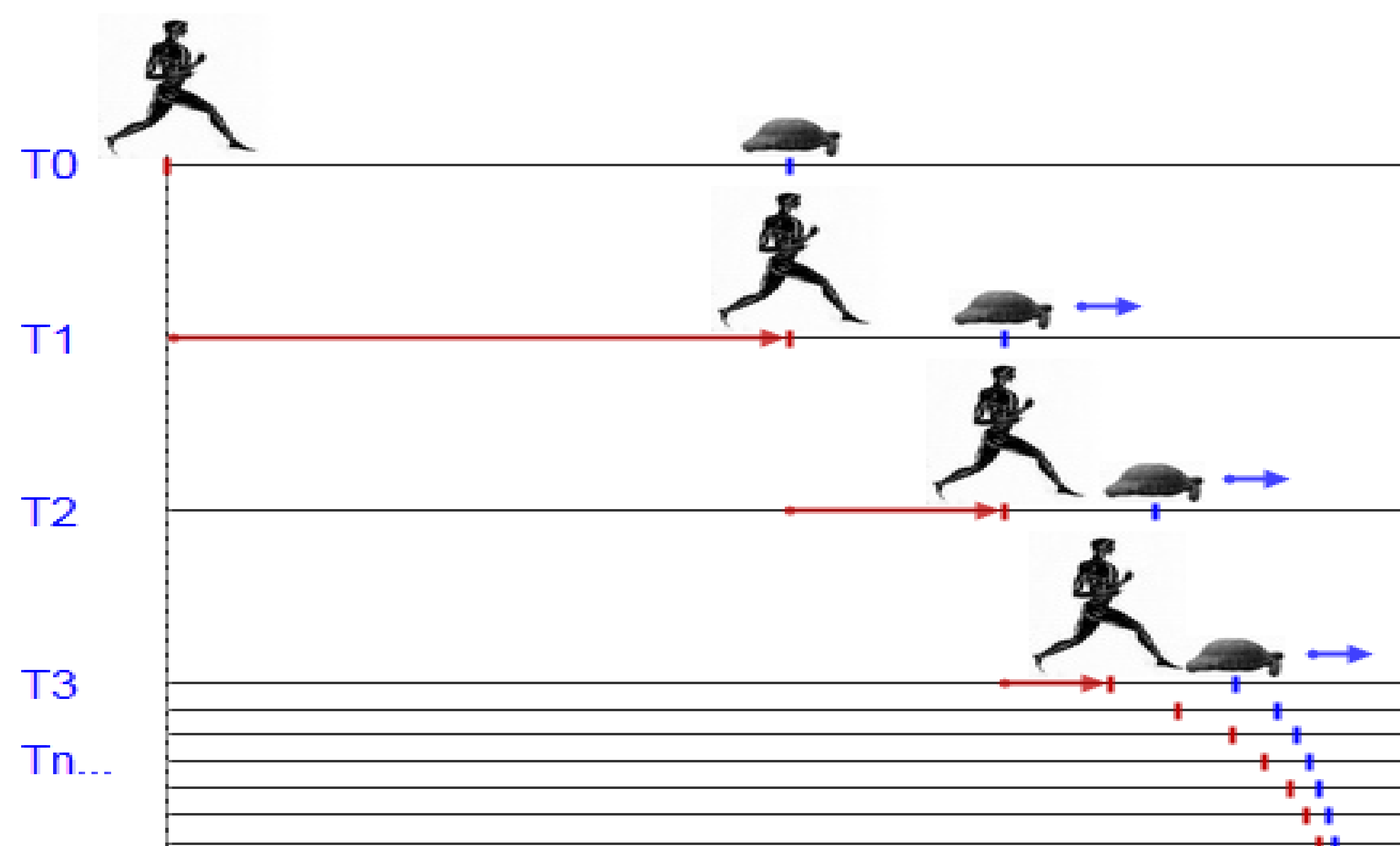
Mohamed BENJELLOUN, Carla CHANCUSI AGUAS, Maxime LECOCQ DE PLETINCX, Marco LORUSSO-FAVIA, Imane BEN LARBI

Paradoxe d'Achille et la tortue

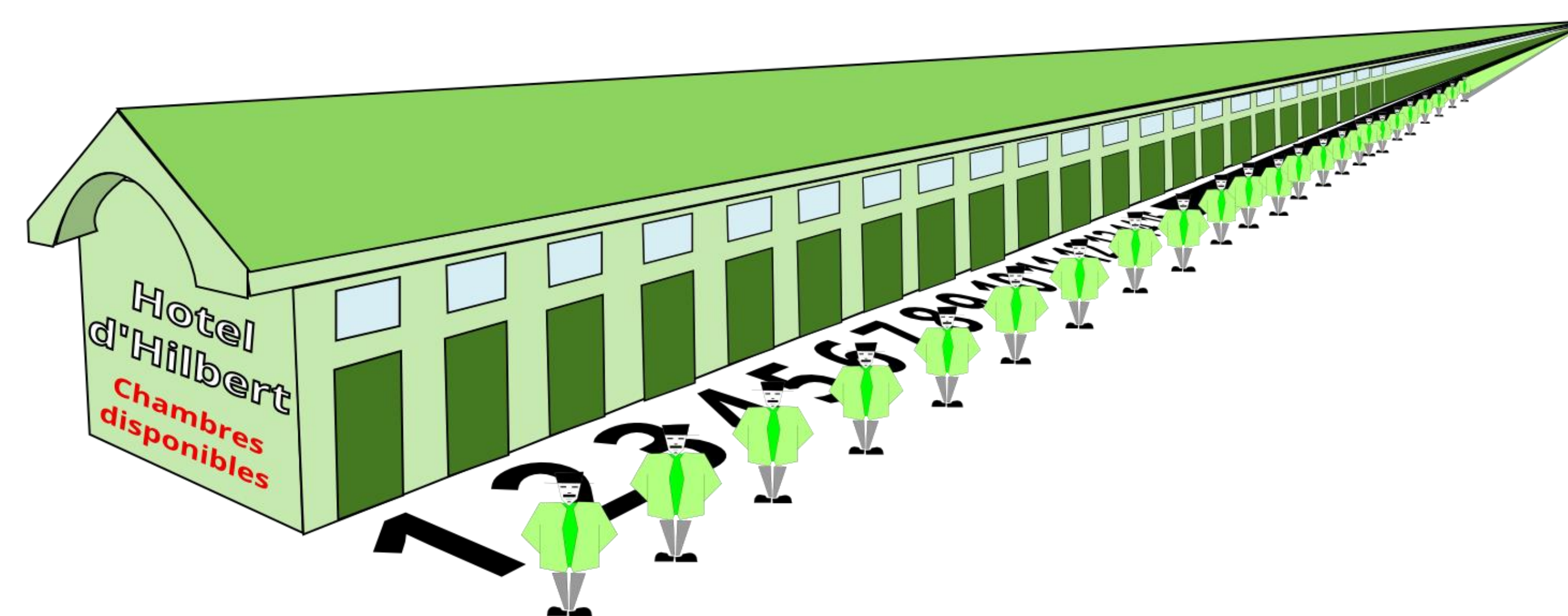
Ces deux personnages participent à une course. La course commence avec la tortue qui a un avantage de 10 mètres. Si Achille est 10 fois plus rapide que la tortue, arrivera-t-il à la dépasser?

Ex: Si Achille court à 10m/s et la tortue à 1m/s, il atteindra la tortue après 10/9 de secondes.

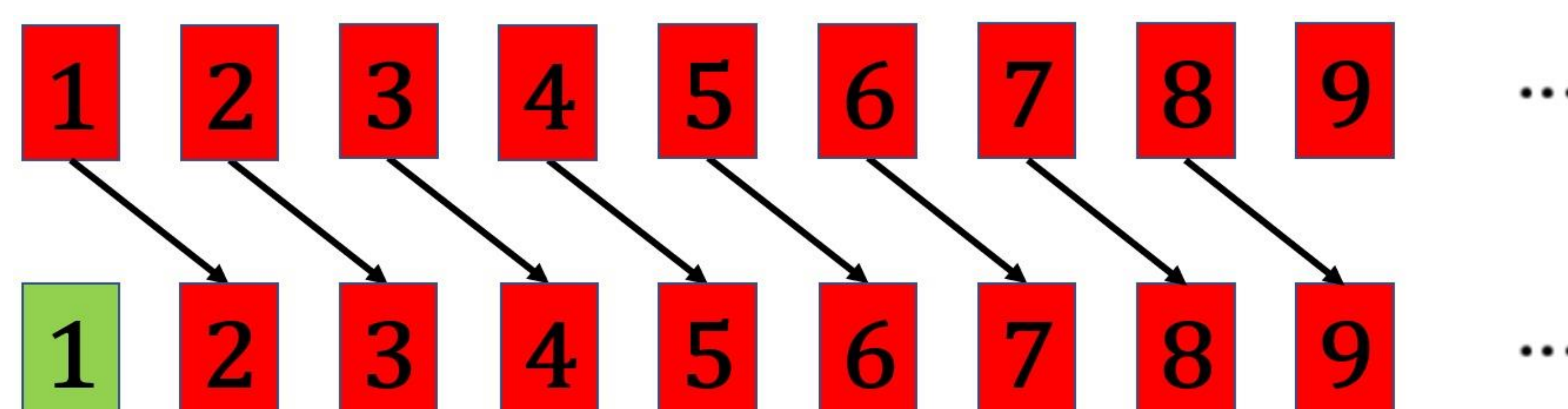
$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = 1,11111 \dots$$


Paradoxe de l'hôtel de Hilbert

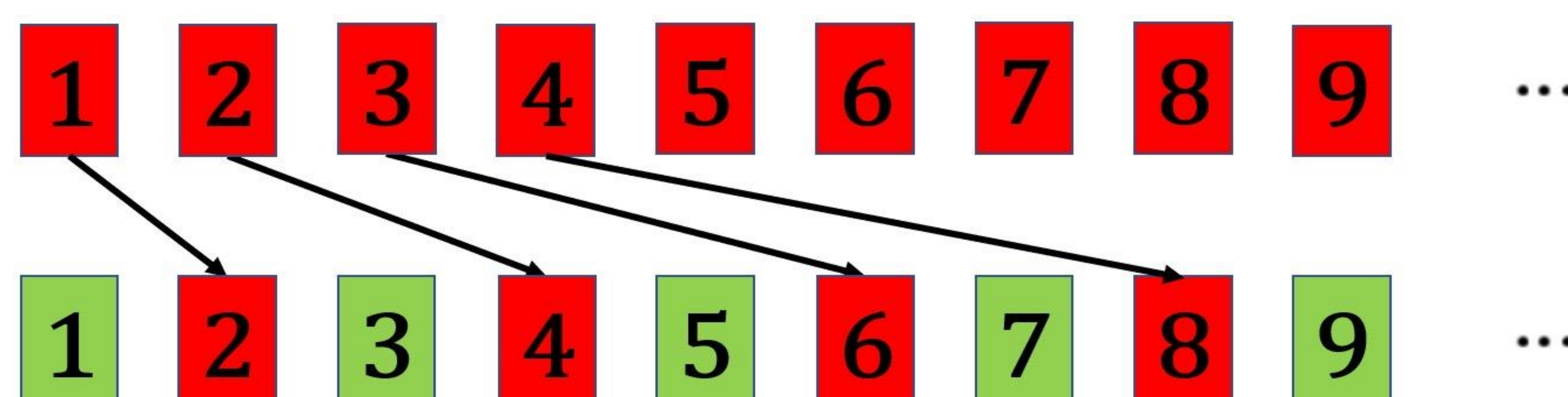
On imagine un hôtel avec une infinité de chambres. Au départ toutes les chambres sont occupées.



Si une nouvelle personne arrive à l'hôtel, peut-on lui donner une chambre ?



Et si on a une infinité de nouvelles personnes qui arrivent en même temps ?


 1. L'hôtel de Hilbert – Y a-t-il quelque chose de plus grand que l'infini? (2015, Juin 02), BlablaSciences, 03 mars 2026, <https://www.blablaSciences.com/?p=284>

 2. Illustration du paradoxe d'Achille et de la tortue, *Le jugement synthétique a priori ou la formation des lois scientifiques*, Food for Thoughts Blog, 15 Nov. 2020, <https://foodforthoughts.blog/2020/11/15/le-jugement-synthetique-a-priori-ou-la-formation-des-lois-scientifiques/>