L'esprit en éveil : 25 ans de culture scientifique
PRINTEMPS DES SCIENCES 23-29 MARS 2026

Fractales et Méthode de Newton

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Auriane NKEN, Enzo RAMPELLO, Ilhan BAYRAK, Jérémy LEGRAIN, Manal MAMMOU et Samuel TURSCH

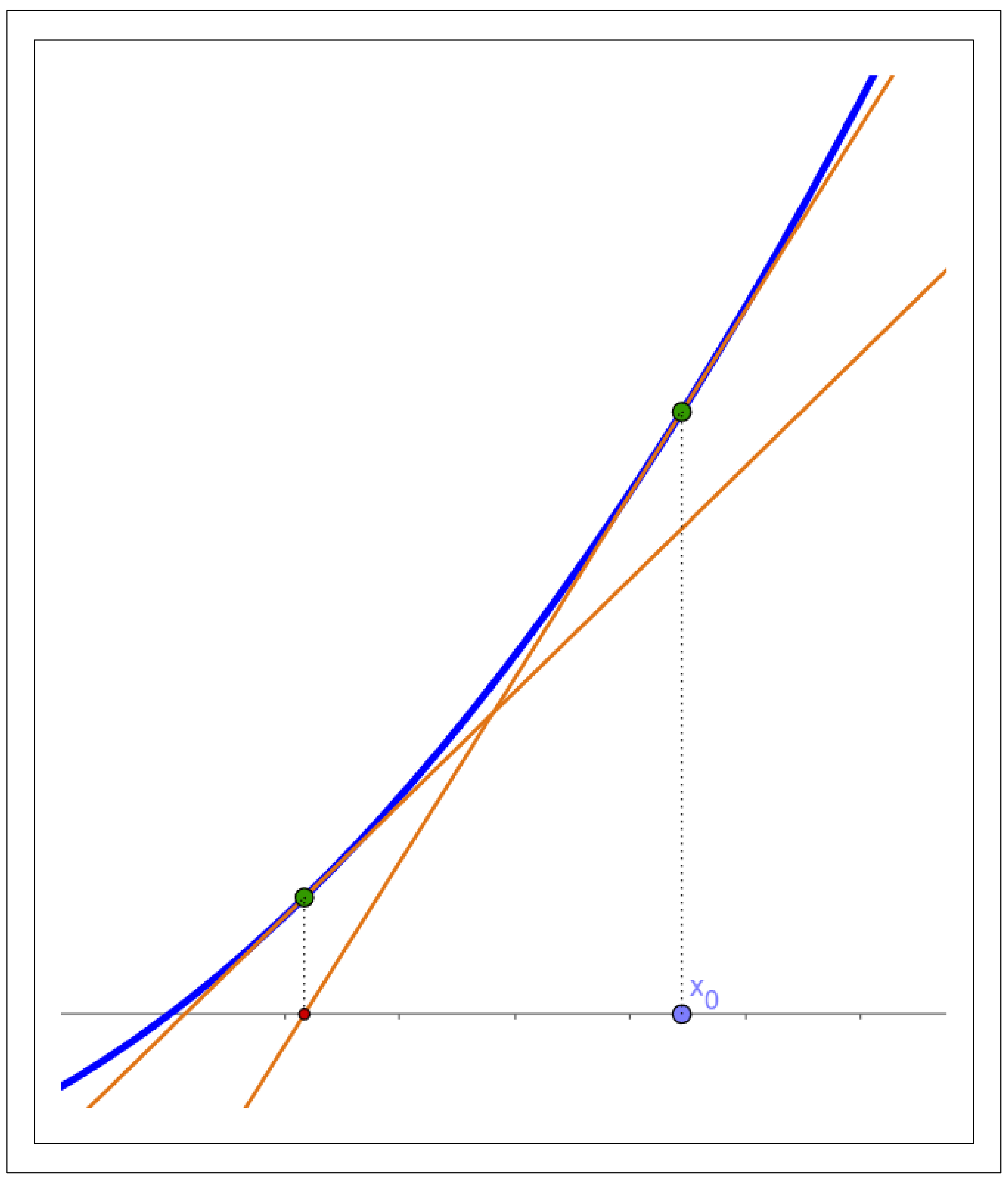
Motivations

- Objectif : Résoudre $f(x) = 0$ pour un polynôme f
- Possibilité : Utiliser une formule
- Alternative : Approximer les solutions

  Méthode de Newton

Deux itérations de la méthode de Newton

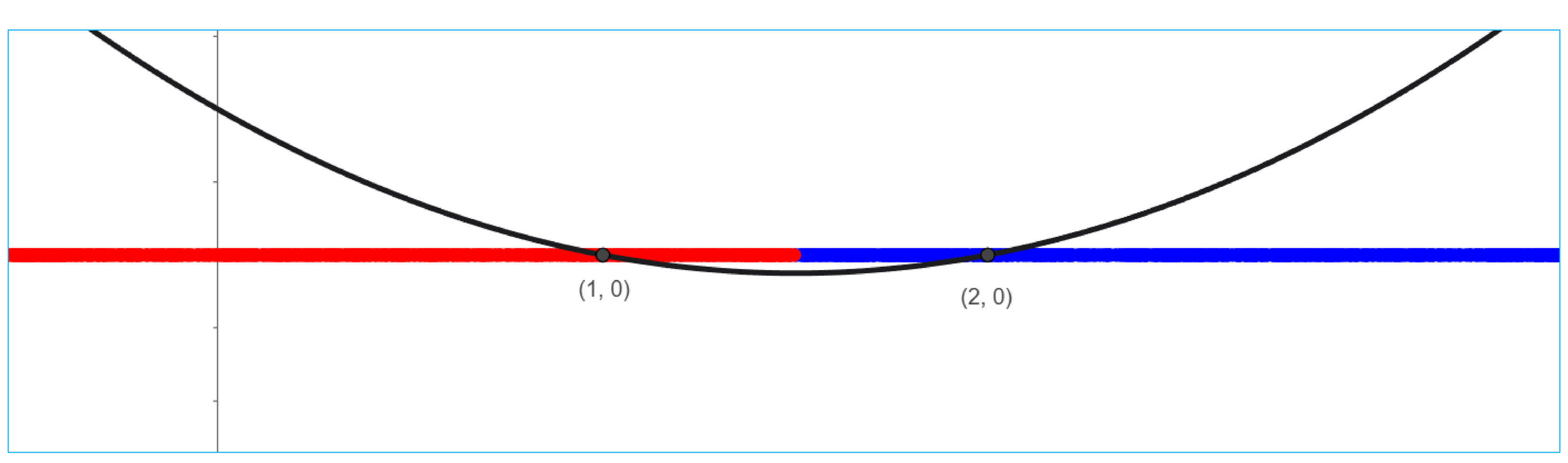
Constatez que notre choix de x_0 permet d'approximer la solution de l'équation.



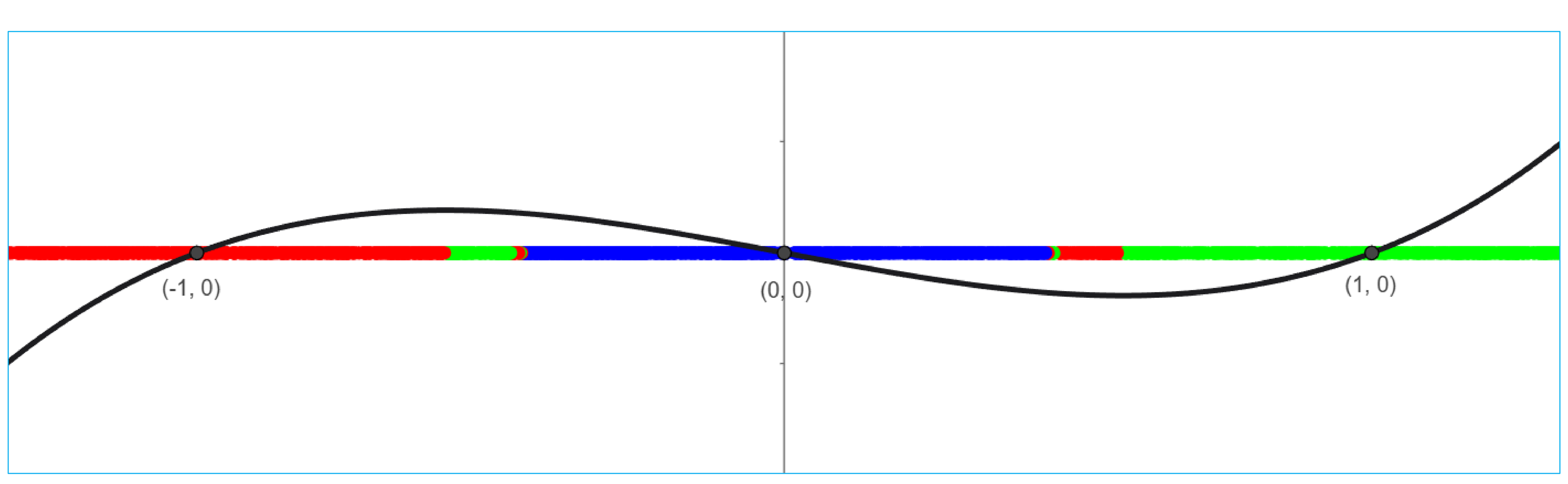
Bassin d'attraction d'une solution

Voici deux exemples de bassins d'attraction :

$\boxed{f(x) = (x-1)(x-2)}$



$\boxed{f(x) = x(x-1)(x+1)}$



Exemples

- Équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Équation polynomiale ne possédant pas de solution exprimable de façon simple : $2x^5 - 10x + 5 = 0$.

Explication de la méthode de Newton réelle

Résolution de l'équation $f(x) = 0$, où f est un polynôme à coefficients réels et x est une variable réelle.

- Étape 1 : Choisir une estimation initiale x_0.
- Étape 2 : Déterminer l'équation de la tangente à f en x_0. Son expression est donnée par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Étape 3 : On note x_1 le point d'intersection entre cette droite et l'axe des abscisses. Son expression est :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On répète le processus en remplaçant x_0 par x_1, puis x_1 par x_2 et ainsi de suite. On a toujours la relation :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Quelques détails techniques

On peut expliciter cette méthode à l'aide de l'application de Newton associée à f :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Si on applique la méthode de Newton au point initial x_0, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = F^n(x_0)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$, on définit son bassin d'attraction :

$$A_f(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} F^n(x) = \alpha\}$$

Une étude avancée nous permet de montrer que $|F'(\alpha)| < 1$. Il peut en être déduit que tout point suffisamment proche de α se situe dans son bassin d'attraction.