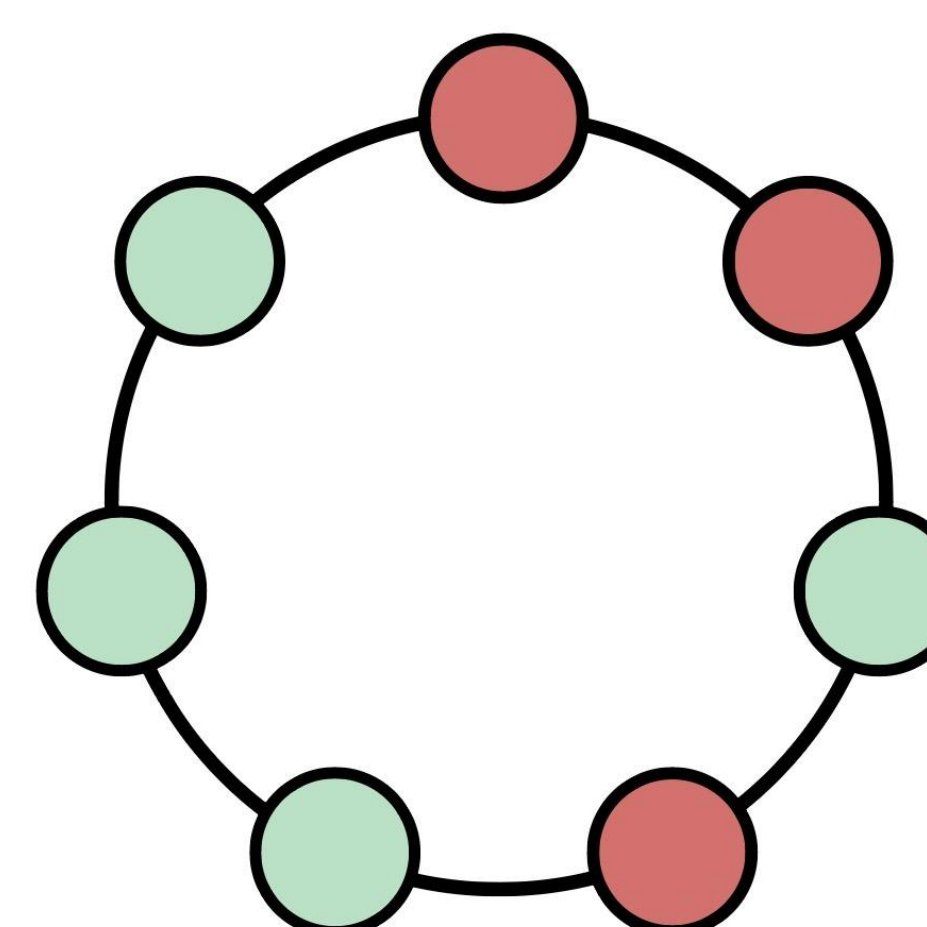


UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

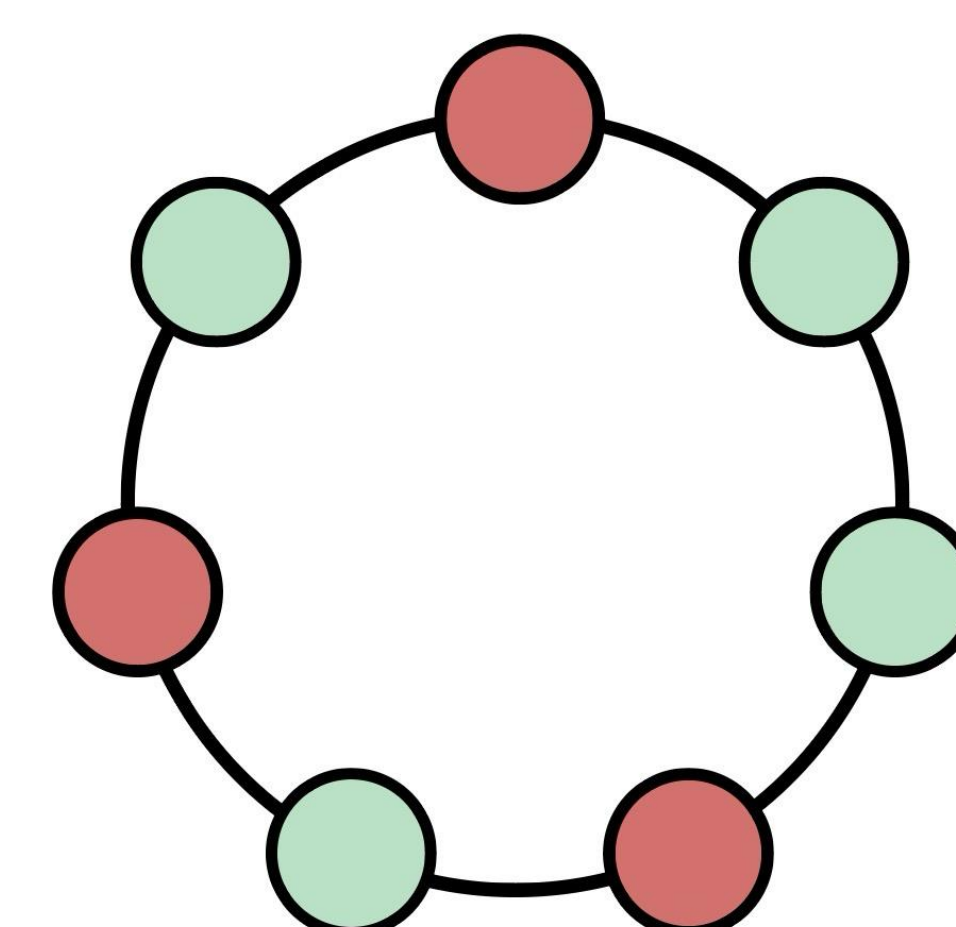
Noé CALLENS WAHL, Aloïs COTTI, Clara DE VEGA OVASKA, Anastasia DUBOIS, Victor MOCHKOV, Léa SALOMÉ et Sophie VAN DE WIELE

Introduction

Les rythmes euclidiens proposent une mathématisation de la musique. Leur principe est simple : répartir les notes le plus régulièrement possible dans le temps.



Non-euclidien



Euclidien

Histoire

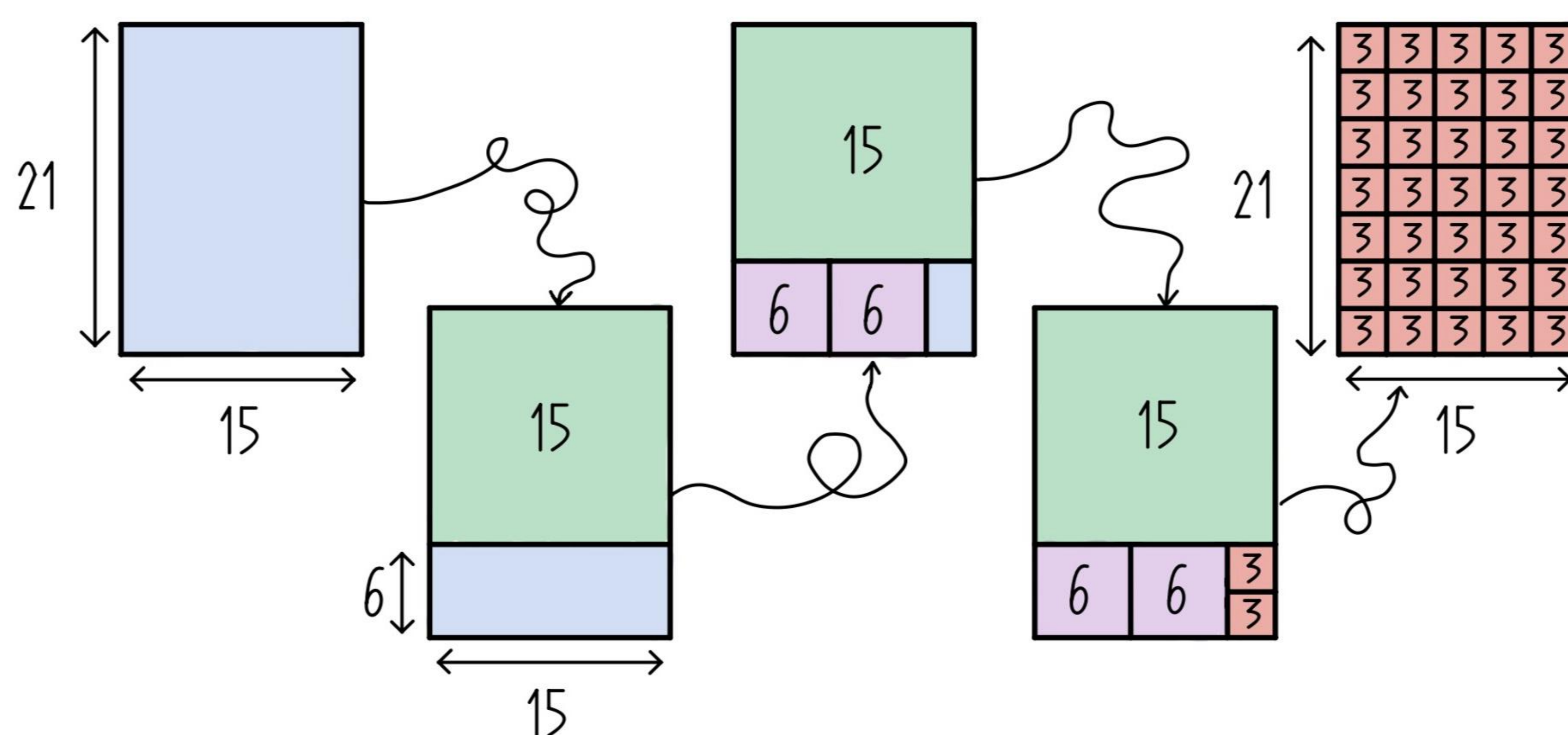
Tout commence vers 300 av. J-C : **Euclide** regroupe des résultats de plusieurs mathématiciens et formalise l'un des plus anciens algorithmes de l'histoire : l'algorithme d'Euclide.

Algorithme d'Euclide

Il permet de trouver de façon efficace le **PGCD** entre deux entiers n et k grâce à $PGCD(n, k) = PGCD(k, r)$, où r est le reste de la division de n par k .

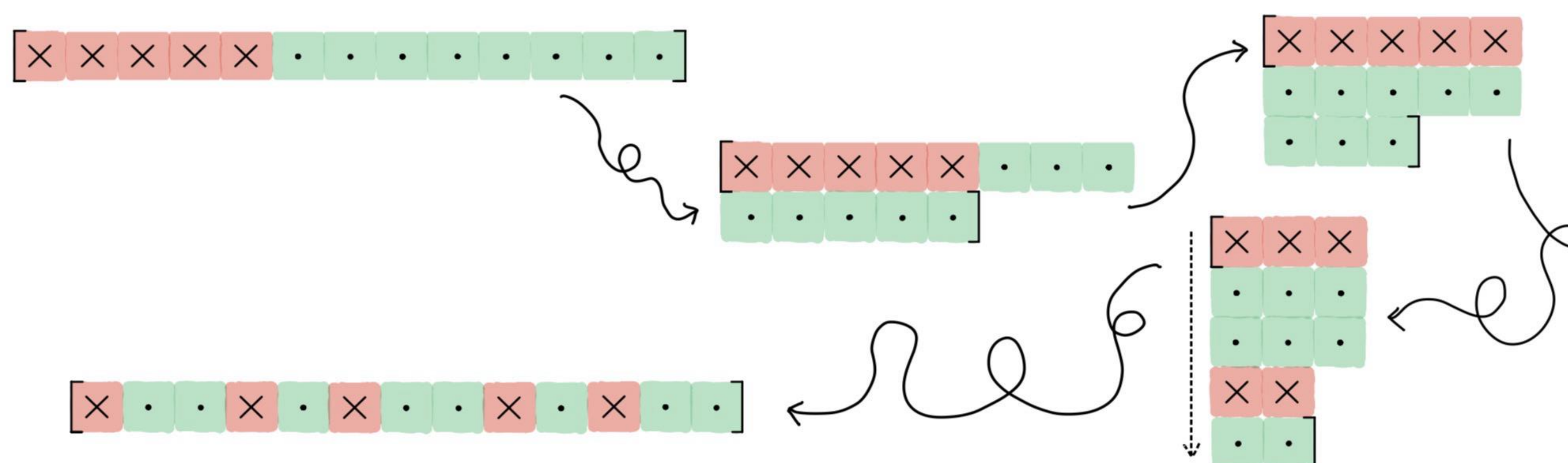
Étapes :

- 1) Prendre deux entiers n, k avec $n \geq k$
- 2) Calculer le **reste** en effectuant la division euclidienne entre n et k
- 3) Reproduire les étapes 1 et 2 en remplaçant (n, k) par (k, r) jusqu'à obtenir $r = 0$
- 4) Dernier $k \neq 0$ est le **PGCD**



$$PGCD(25, 15) = PGCD(15, 6) = PGCD(6, 3) = 3$$

Construction des rythmes euclidiens



- 1) $n = 13, k = 5$
- 2) $13 = 2 \times 5 + 3 \rightarrow r = 3$
- 3) $5 = 1 \times 3 + 2 \rightarrow r = 2$
- 4) $3 = 1 \times 2 + 1 \rightarrow r = 1$

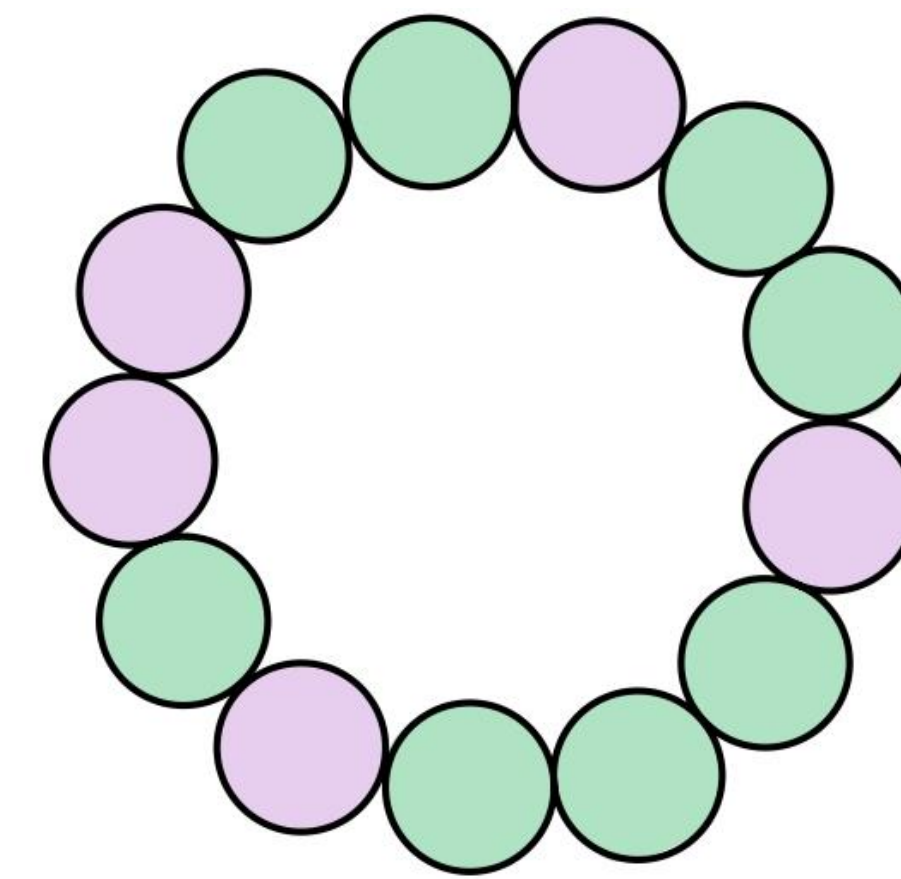
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Noé CALLENS WAHL, Aloïs COTTI, Clara DE VEGA OVASKA, Anastasia DUBOIS, Victor MOCHKOV, Léa SALOMÉ et Sophie VAN DE WIELE

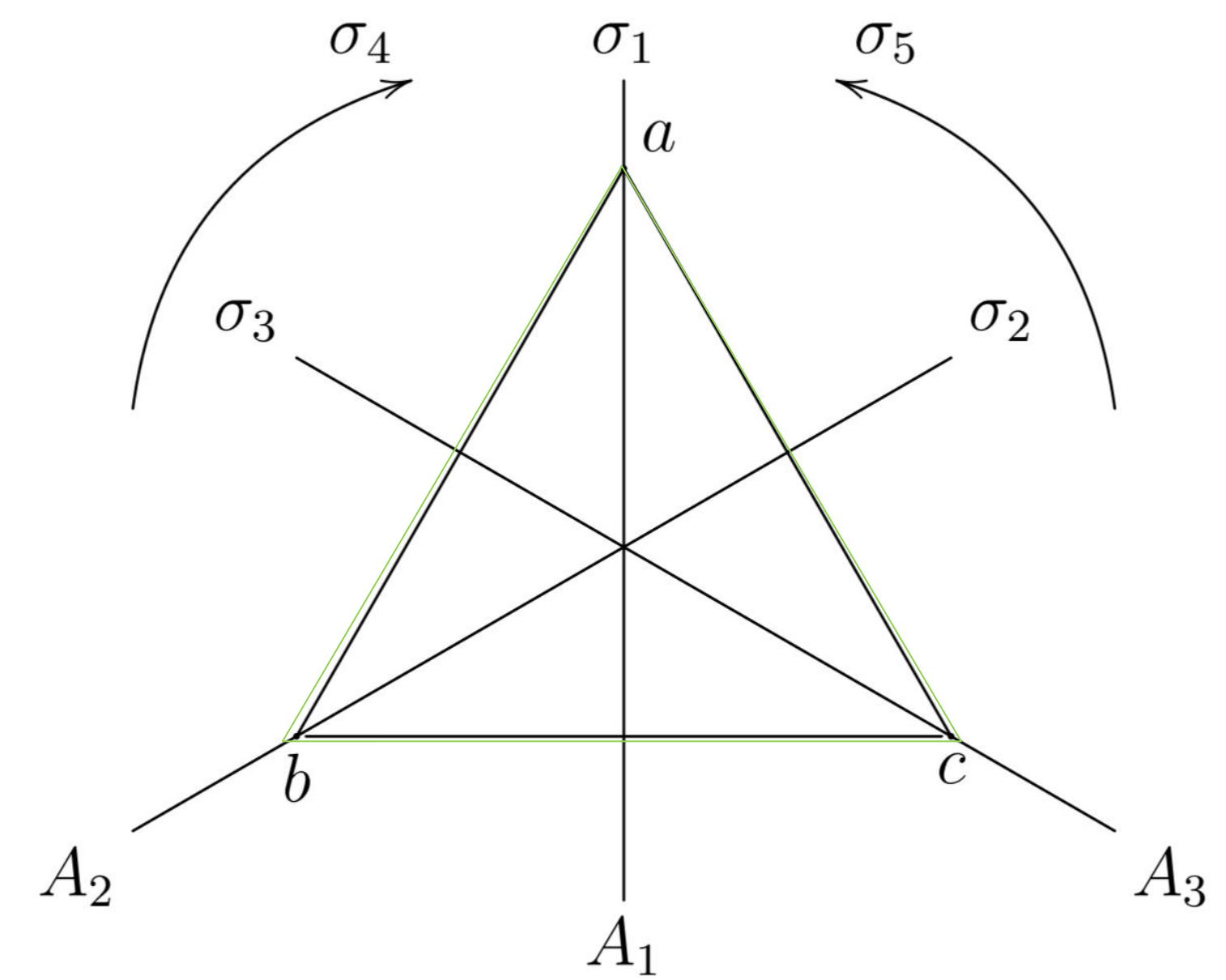
Groupe

Un **groupe** est un ensemble G muni d'une **opération interne** et partout définie " $*$ " tel que :

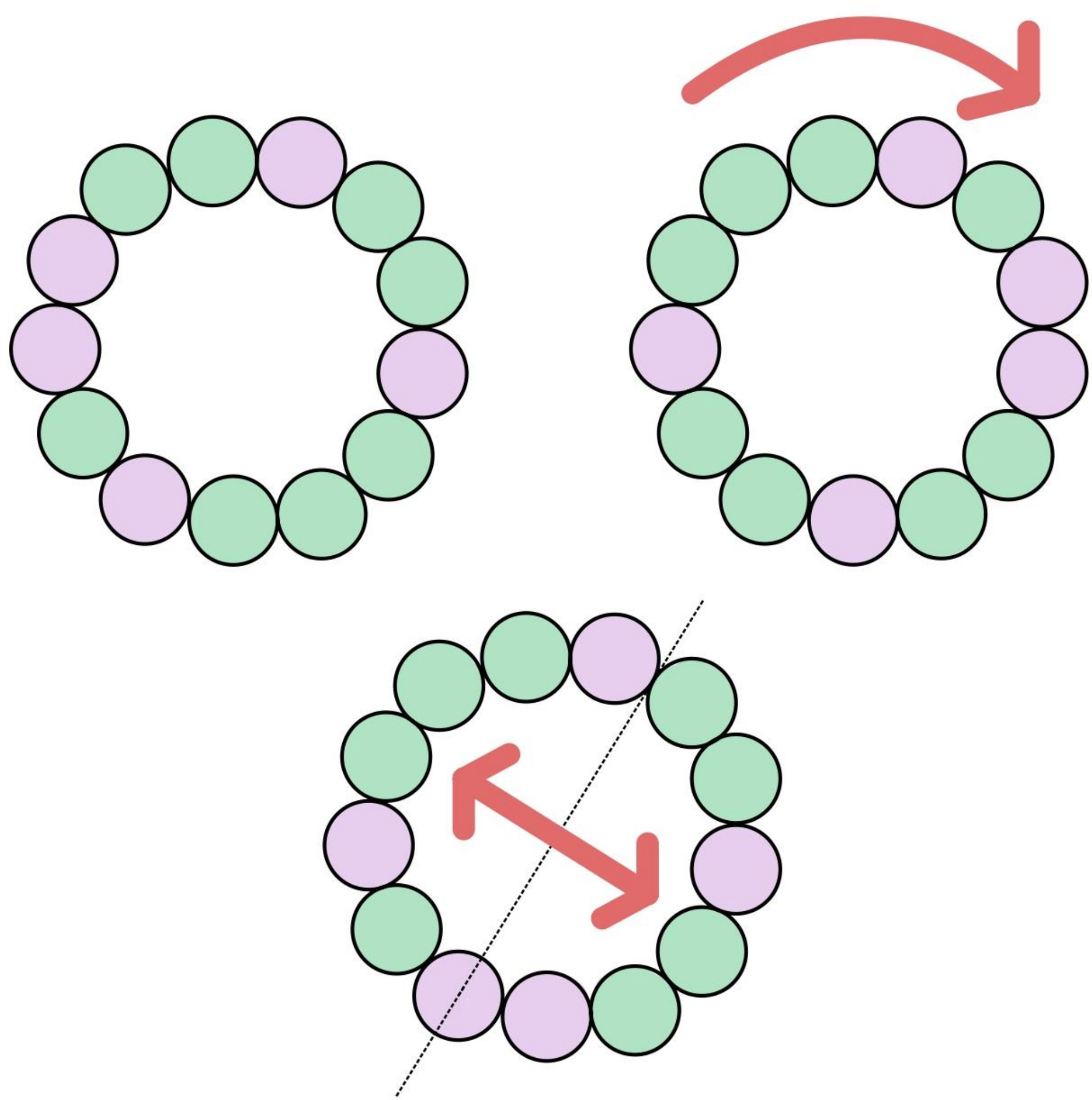
- Il existe un élément **neutre** $e \in G : \forall g \in G, e * g = g * e = g$
- Tout élément $g \in G$ a un **inverse** $g^{-1} \in G : g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$
- L'opération est **associative** : $\forall g, h, k \in G, (g * h) * k = g * (h * k)$



Collier bicolore



Groupe diédral D3



Le groupe des symétries diédral agit sur l'ensemble des rythmes à n temps et à k notes.

Relation d'équivalence et action de groupe

La **relation d'équivalence** $\sim$ sur l'ensemble X satisfait les propriétés suivantes:

- **Réflexive** : $\forall x \in X, x \sim x$
- **Symétrique** : $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
- **Transitive** : $\forall x, y, z \in X, x \sim y \text{ et } y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Un groupe G peut **agir** sur un ensemble X :

$g \cdot x = y$ pour $x, y \in X, g \in G$. Ceci crée une **relation d'équivalence** : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y$

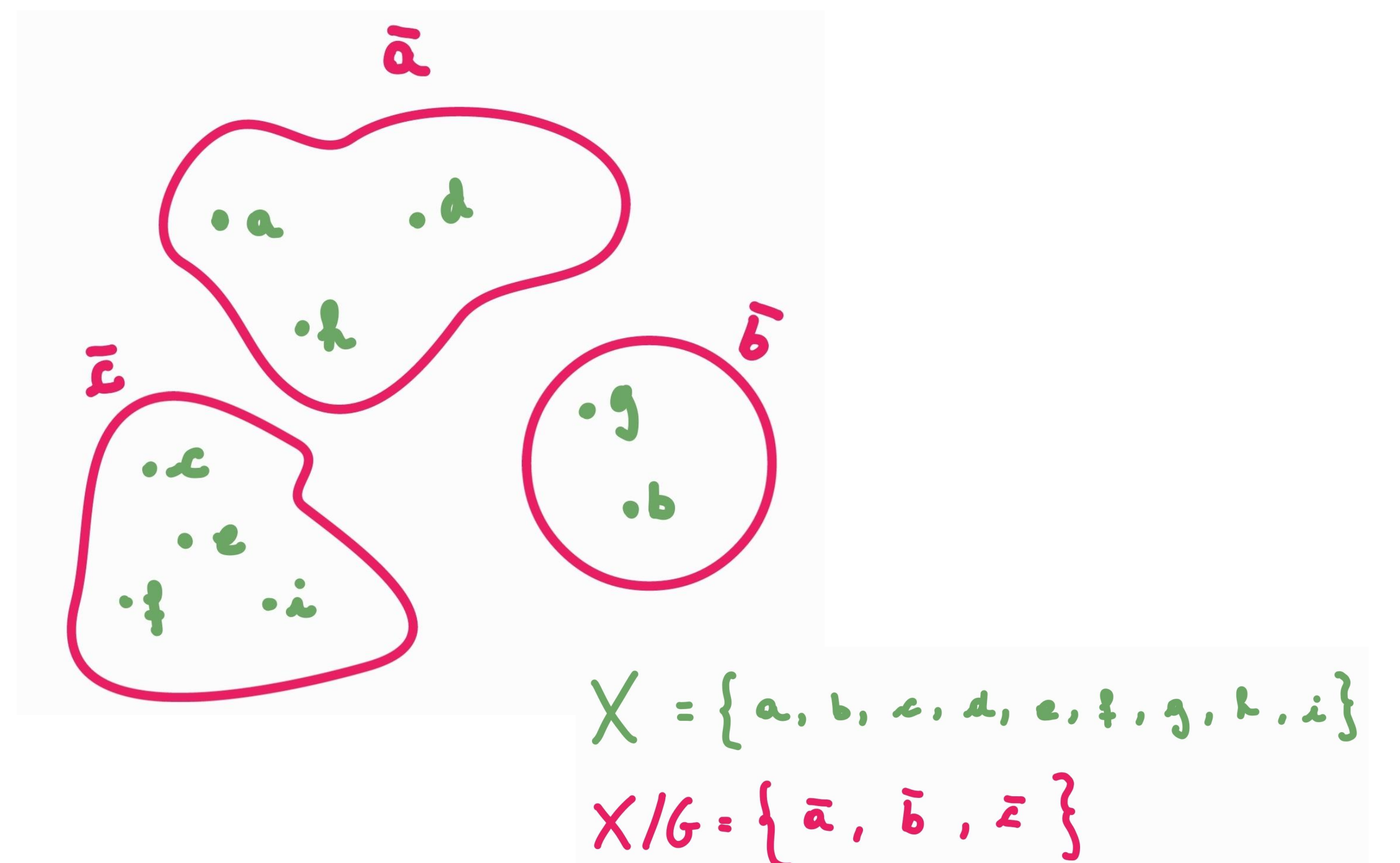
Classe d'équivalence, orbite et quotient

La **classe d'équivalence** de $x \in X$ est l'ensemble $\bar{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$, x est alors un représentant de cette classe (attention, x n'est pas unique).

L'**orbite** de x sous l'action de G , $O_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ est la classe d'équivalence de $\sim$. Les orbites **partitionnent** X .

Le **groupe quotient** $\frac{X}{G}$ est l'ensemble des classes d'équivalences.

$\left| \frac{X}{G} \right|$ est le nombre d'orbites de X .



Exemple de 3 classes d'équivalences.

Lemme de Burnside

Soit G un **groupe fini** agissant sur un ensemble X . Alors $\left| \frac{X}{G} \right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$

Remarque

Le **fixateur** de g est l'ensemble des colliers qui restent invariants par symétrie.

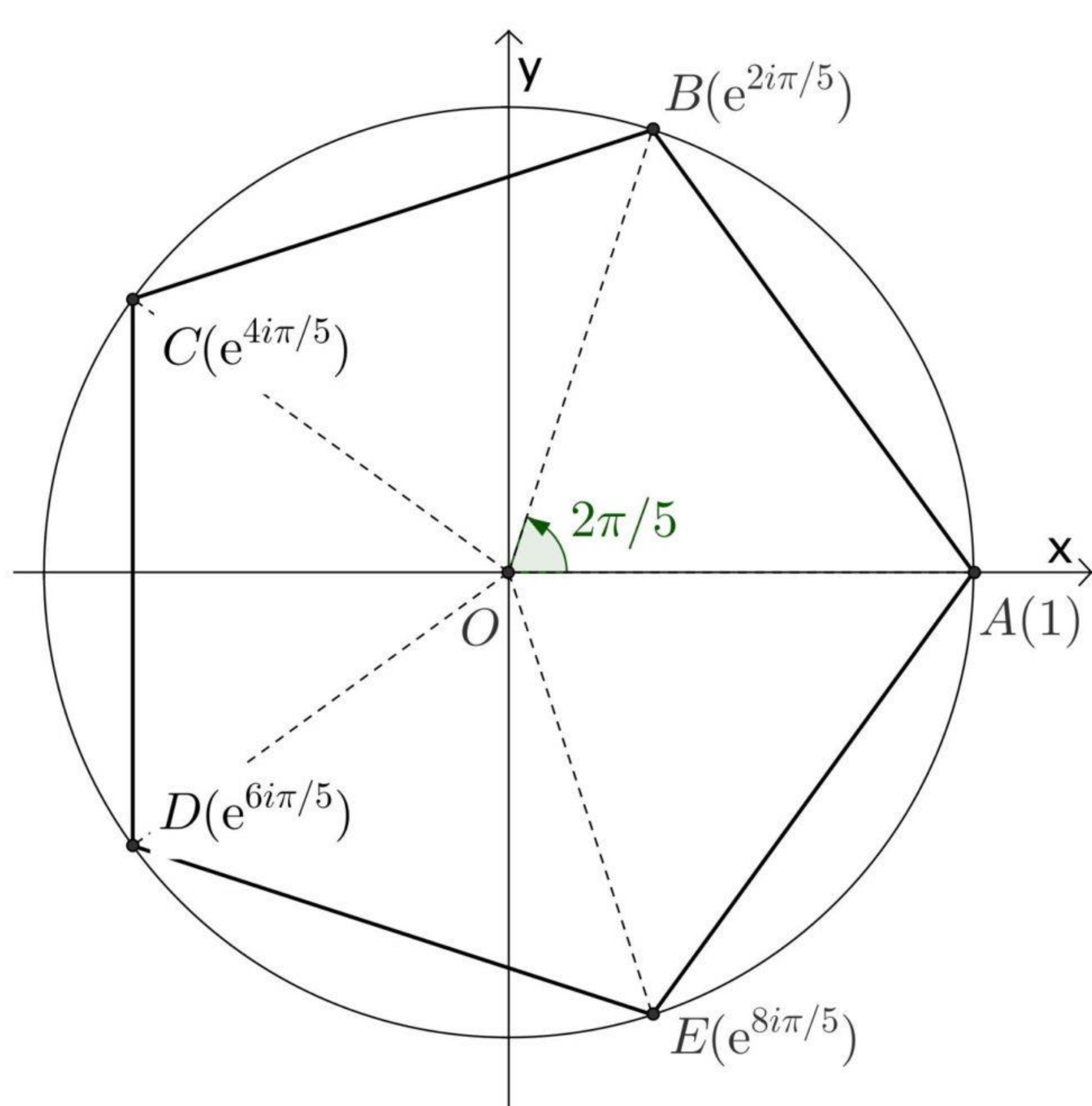
$$Fix(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Noé CALLENS WAHL, Aloïs COTTI, Clara DE VEGA OVASKA, Anastasia DUBOIS, Victor MOCHKOV, Léa SALOMÉ et Sophie VAN DE WIELE

Rythme équilibré

Un rythme équilibré est un rythme dont le **centre géométrique du polygone coïncide** avec le centre du **cercle**. Dans le plan de Gauss, le centre géométrique s'exprime comme la somme des points.

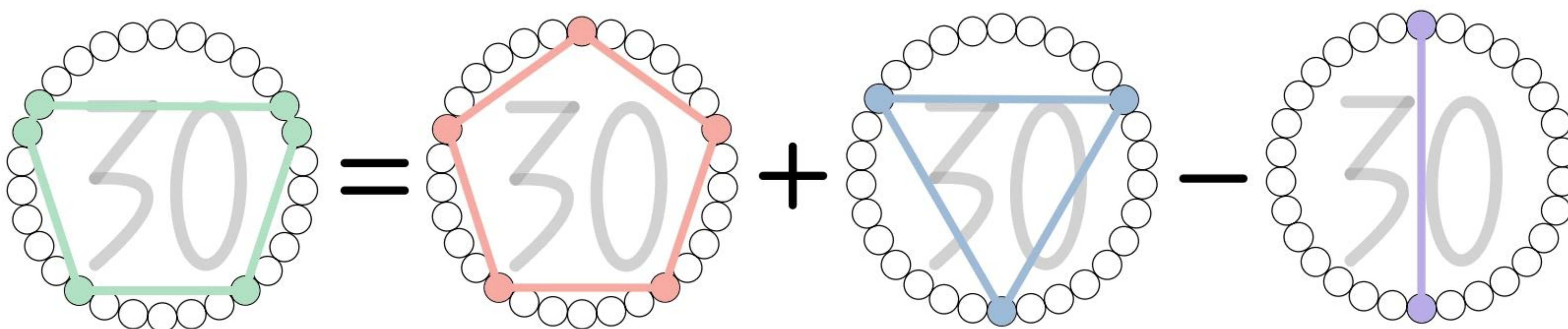


Remarque

Les polygones réguliers forment des rythmes euclidiens.

Théorème (Milne, 2017)

Un rythme équilibré est une somme **positive ou négative** de polygones réguliers (et donc sont la composition de rythmes euclidiens).



Attention

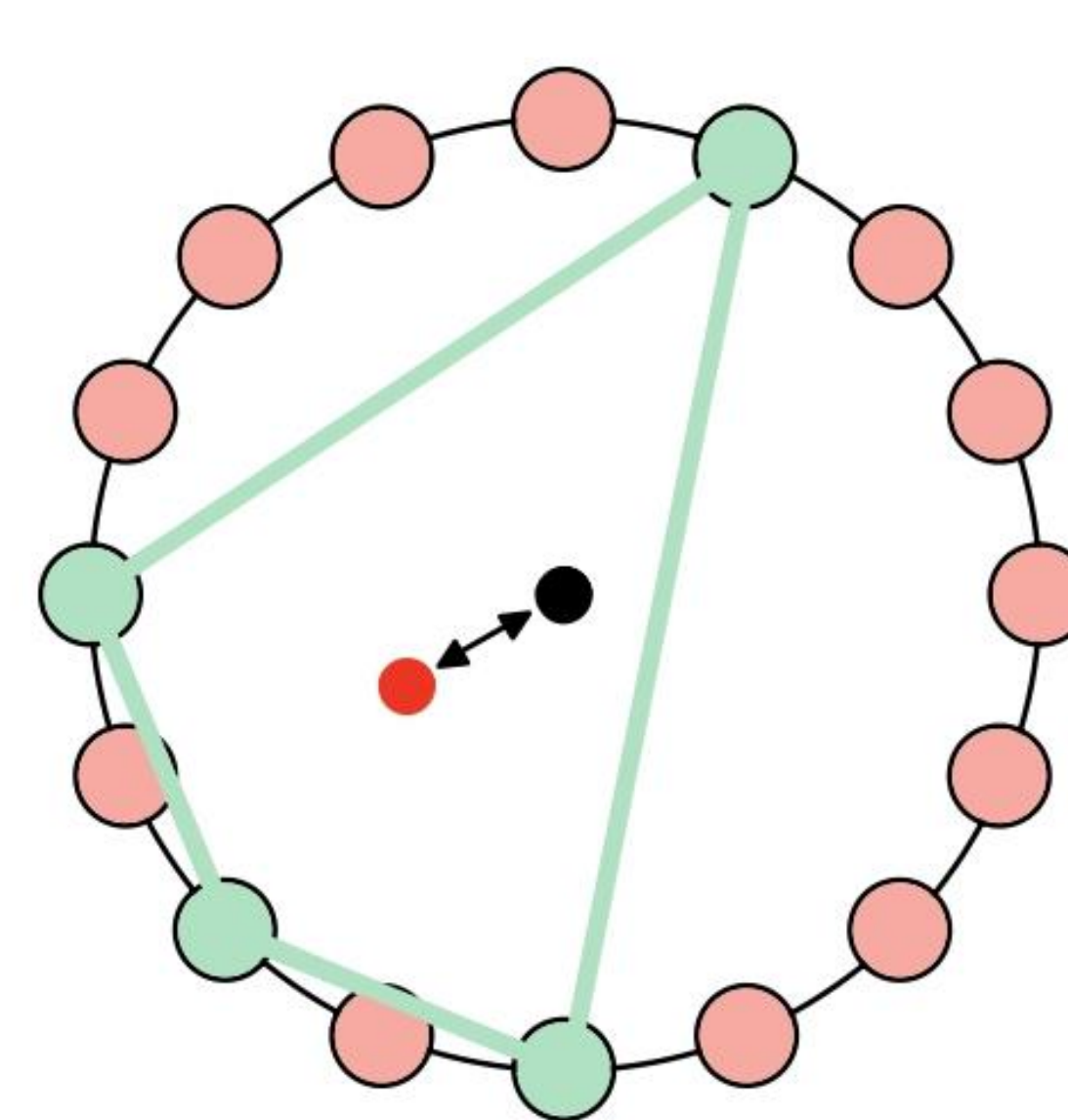
La **réciproque** est fausse !

Les rythmes réguliers, un monoïde pour chaque valeur de n

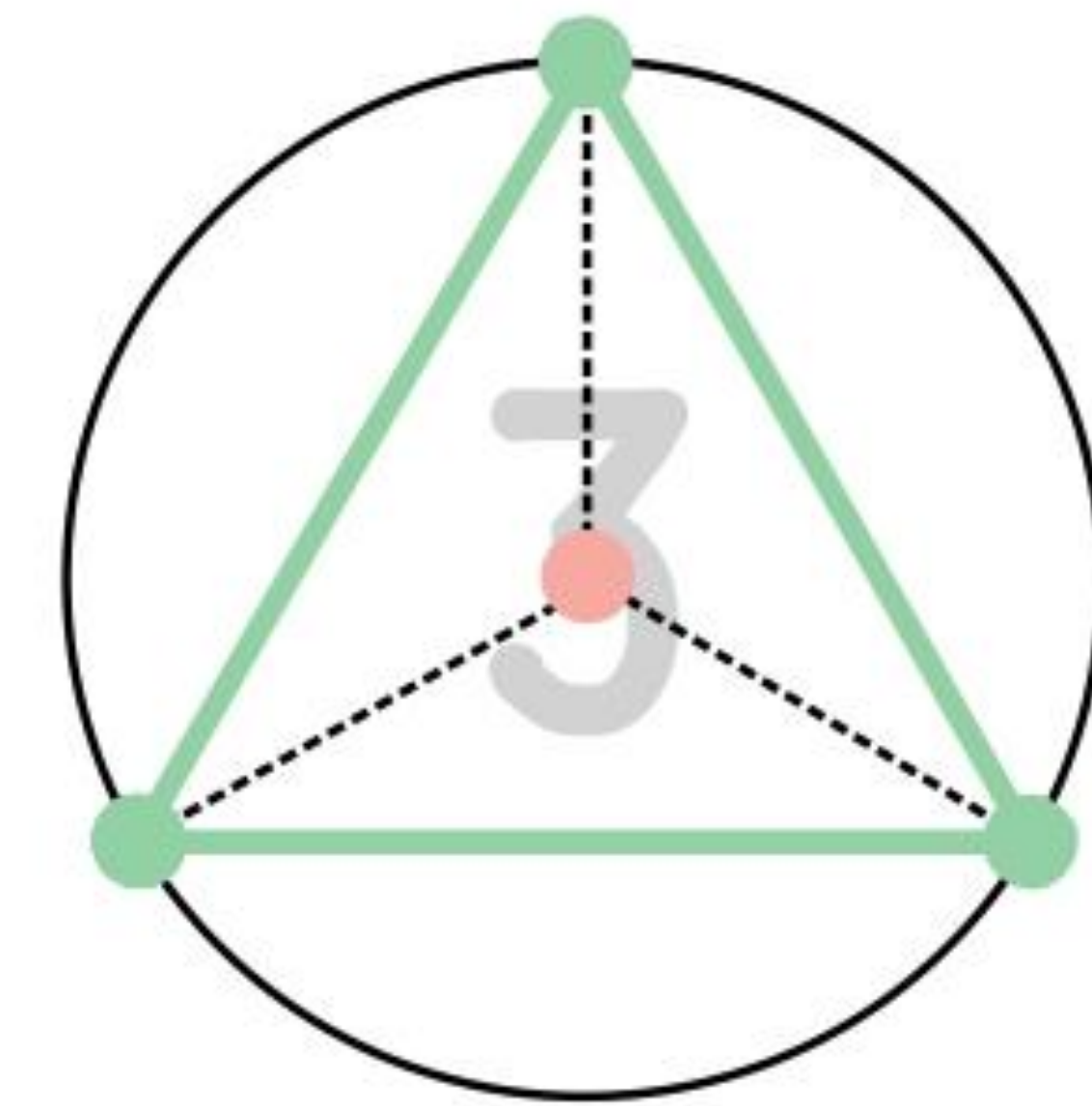
Les rythmes réguliers à n temps forment un **monoïde**, en prenant la somme (naturelle) de rythmes.

- La somme de rythmes équilibrés est un rythme équilibré
- Associativité
- Existence d'un neutre (le rythme **nul**)

MAIS pas existence d'un **symétrique** pour tout rythme



Rythme non-équilibré



Rythme équilibré

Les polygones réguliers

Les polygones réguliers sont évidemment des rythmes équilibrés. Si on prend les **racines de l'unité**, c'est-à-dire les solutions complexes de l'équation $\zeta^n = 1$, pour un n donné, on sait qu'elles se placent sur un cercle de rayon 1 dans le plan de Gauss. Ainsi, le centre de masse vaut

$$1 + \zeta + \dots + \zeta^{n-1} = \frac{1-\zeta^n}{1-\zeta} = 0,$$

c'est-à-dire que le **rythme associé à un polygone régulier est un rythme équilibré**.