PRINTEMPS DES SCIENCES 24-30 MARS 2025

L'optimisation à portée de main !
Surfaces Minimales

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

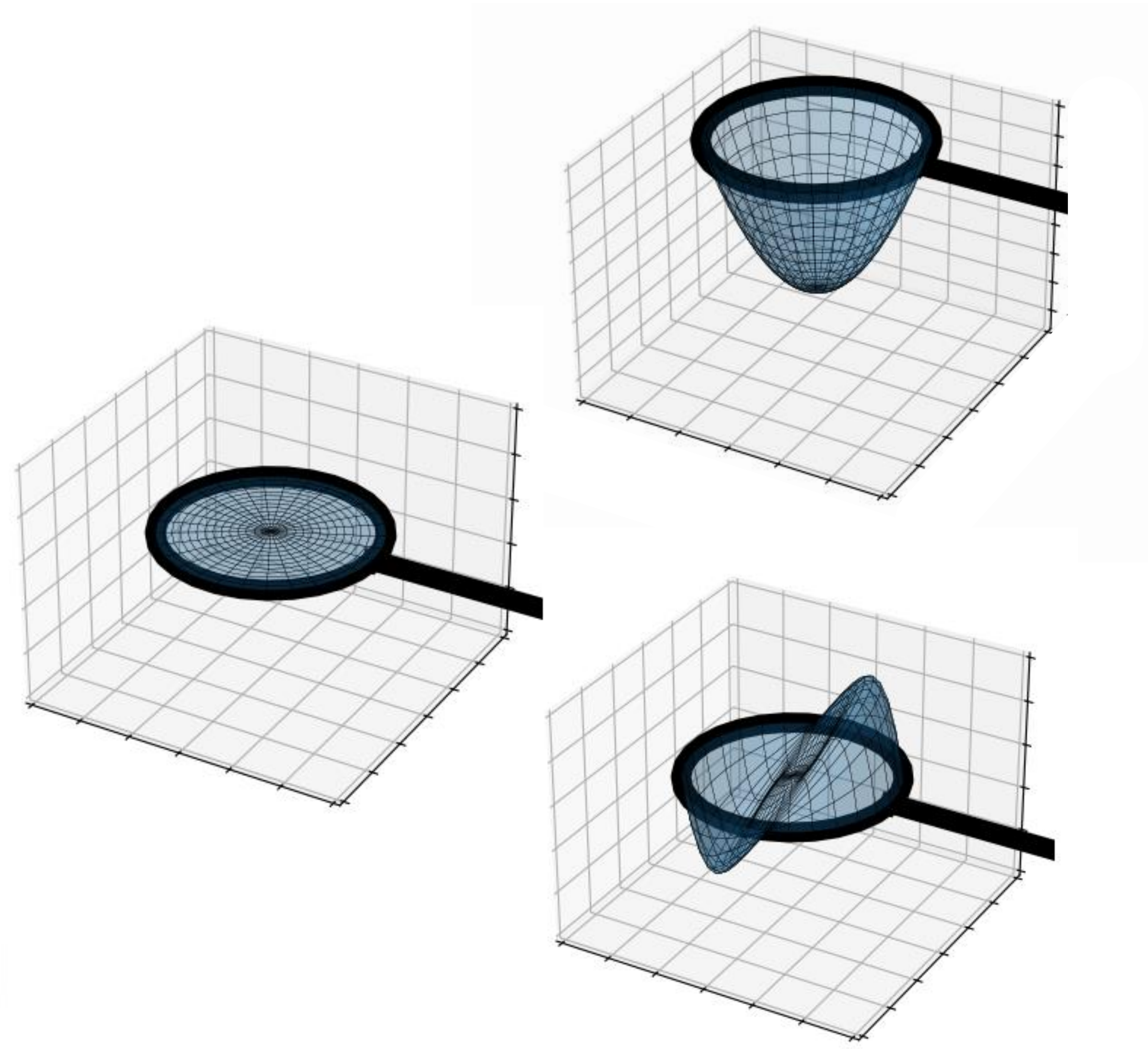
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATHIQUE
Maximilian JORDAN, Pauline RIOS, Emi ROSENBAUM et Ashe VAZQUEZ NUNEZ

Surfaces et problèmes de minimisation

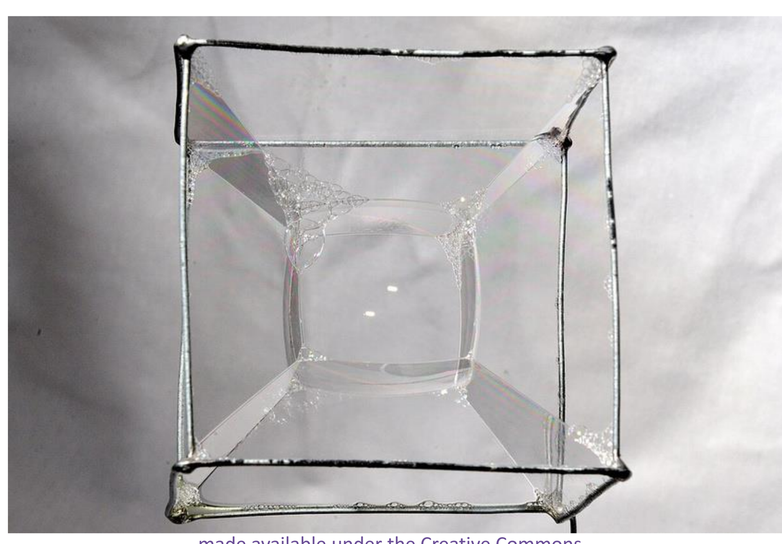
Surfaces

Parmi ces trois surfaces qui connectent le bord circulaire, laquelle utilise le moins de matériaux ? Et laquelle a la plus petite aire ? La réponse évidente est le toit plat, cependant, le problème devient très compliqué une fois que le bord à recouvrir se complique.

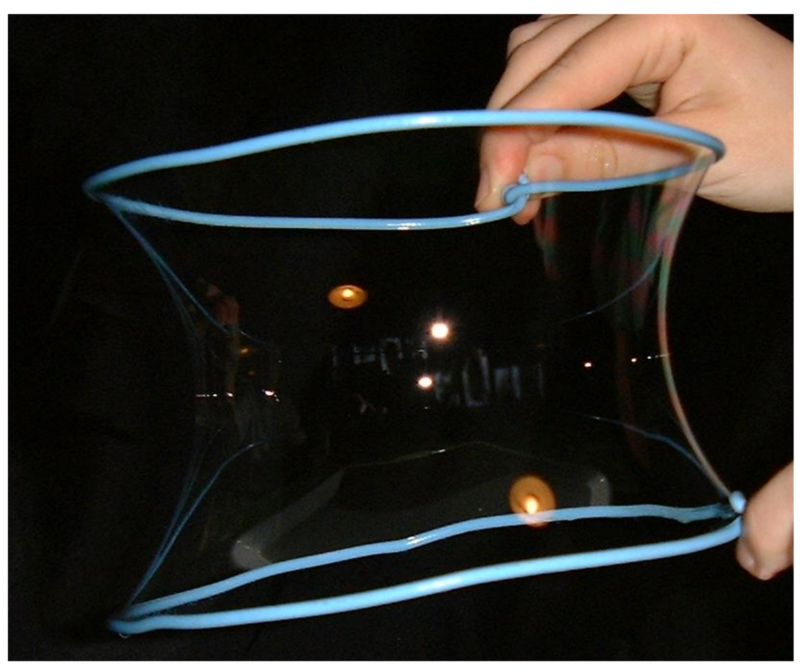
Nous voulons naturellement **minimser les ressources** investies pour obtenir un résultat, mais il s'avère que la nature est aussi paresseuse que nous ! Ainsi, ces surfaces dites minimales apparaissent partout dans la **nature** : dans les films de savon, dans les toiles d'araignées, et même dans les trous noirs.



made available under the Creative Commons
CC0 3.0 Universal Public Domain Dedication
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.fr
by Nachosan Minimal surfaces. Plateau's problem 03.jpg

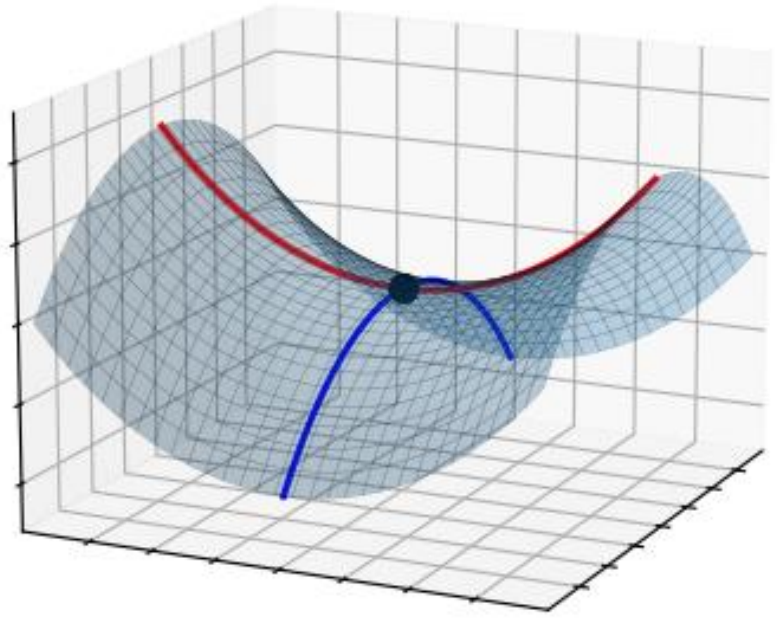


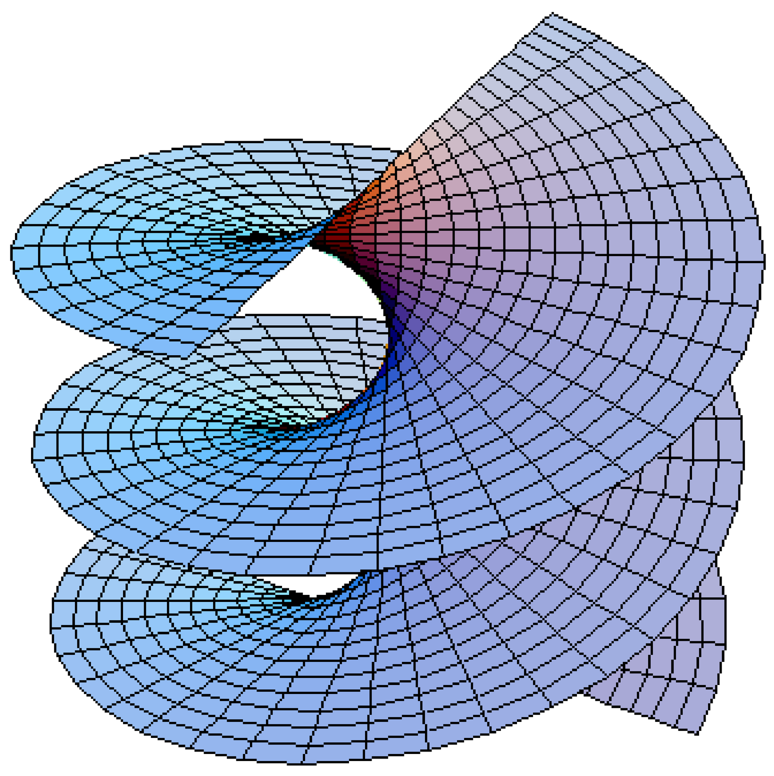
made available under the Creative Commons
CC0 4.0 Universal Public Domain Dedication
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr
by Daniela_deGol on Wikimedia, Minimal surface.jpg



made available under the Creative Commons
CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication

En rouge et bleu: Courbures égales et opposées (équilibrées)



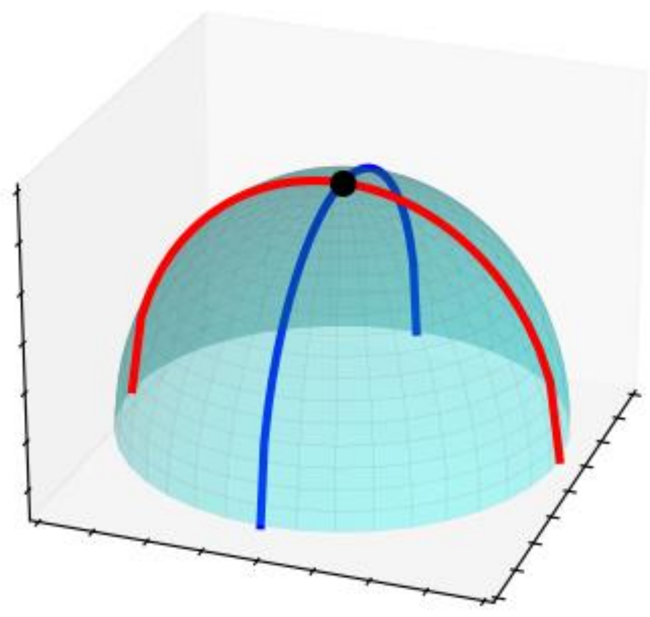


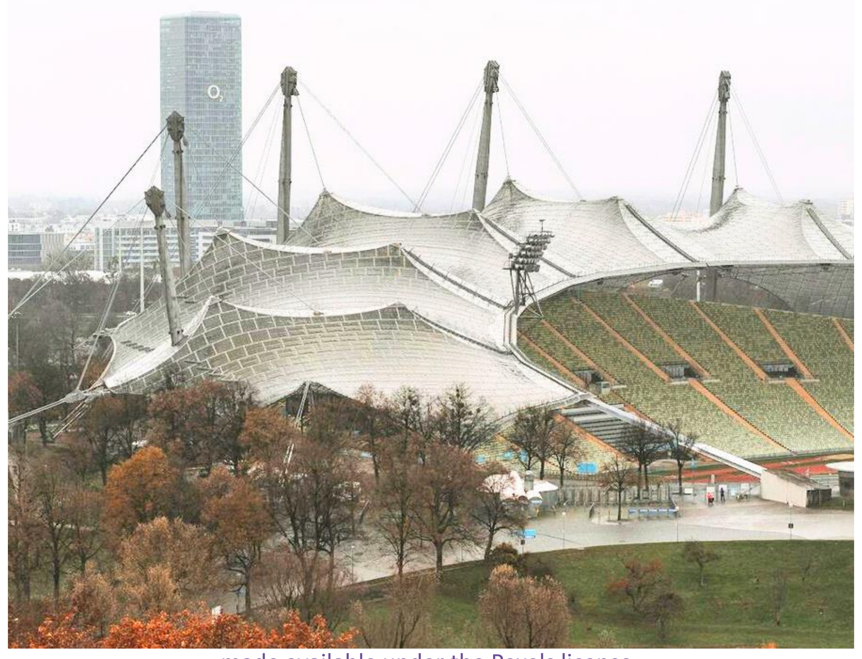
made available under the Creative Commons
CC0 3.0 Universal Public Domain Dedication
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.fr
by AugPi on Wikimedia using Mathematica, Helicoid.PNG

Comment identifier une surface minimale?

Les courbures

Les surfaces sont des formes dans l'espace qui ressemblent à des **plans déformés**. La **courbure** d'une surfaces mesurent le degré de déformation de la surface. Il s'avère qu'une surface est **minimale** si et seulement si les **courbures** sont **équilibrées**. En d'autres termes, une surface minimale n'admet ni concavité ni convexité locale. En effet, une surface concave (par exemple la demi-sphère ci-dessous) est courbée vers le bas, ce qui rompt l'équilibre des courbures.





made available under the Pexels license.
author: Nici Gottstein

Applications

Nous pouvons retrouver des surfaces minimales dans diverses **architectures**. Le toit du Stade olympique de Munich a par exemple été inspiré d'une surface minimale. Il en est de même pour le Pont de Musmeci en Italie ou encore pour de nombreux chapiteaux de cirque.

made available under the Creative Commons
CC0 4.0 Universal Public Domain Dedication
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr
by Tarta46 on Wikimedia, Nato dal Sapone.jpg, with modifications (luminosity, shadows)

made available under the Pexels license.
author: Oscar Sánchez

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES

PRINTEMPS DES SCIENCES 24-30 MARS 2025

L'optimisation à portée de main !
Géodésiques

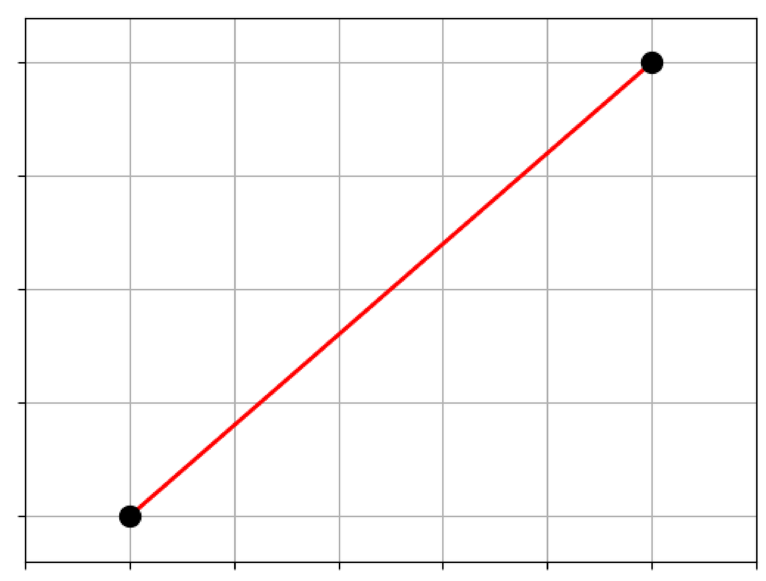
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATHIQUE
Maximilian JORDAN, Pauline RIOS, Emi ROSENBAUM et Ashe VAZQUEZ NUNEZ

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES

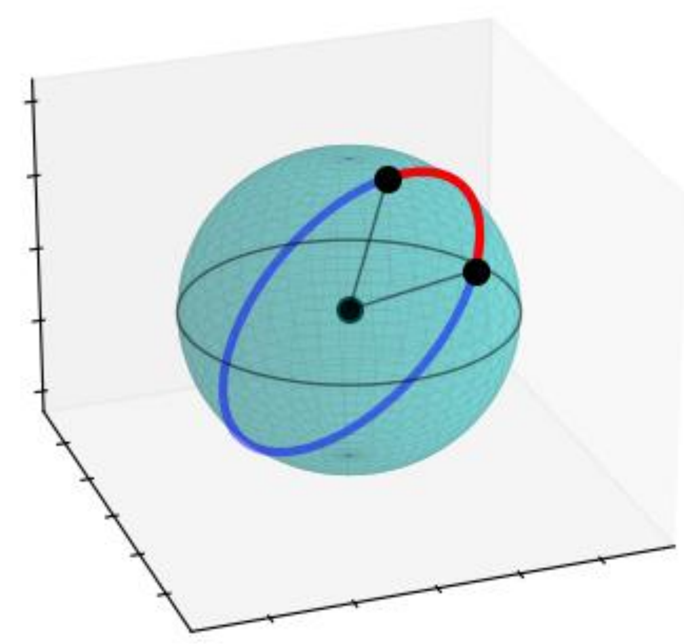
Que sont les géodésiques?

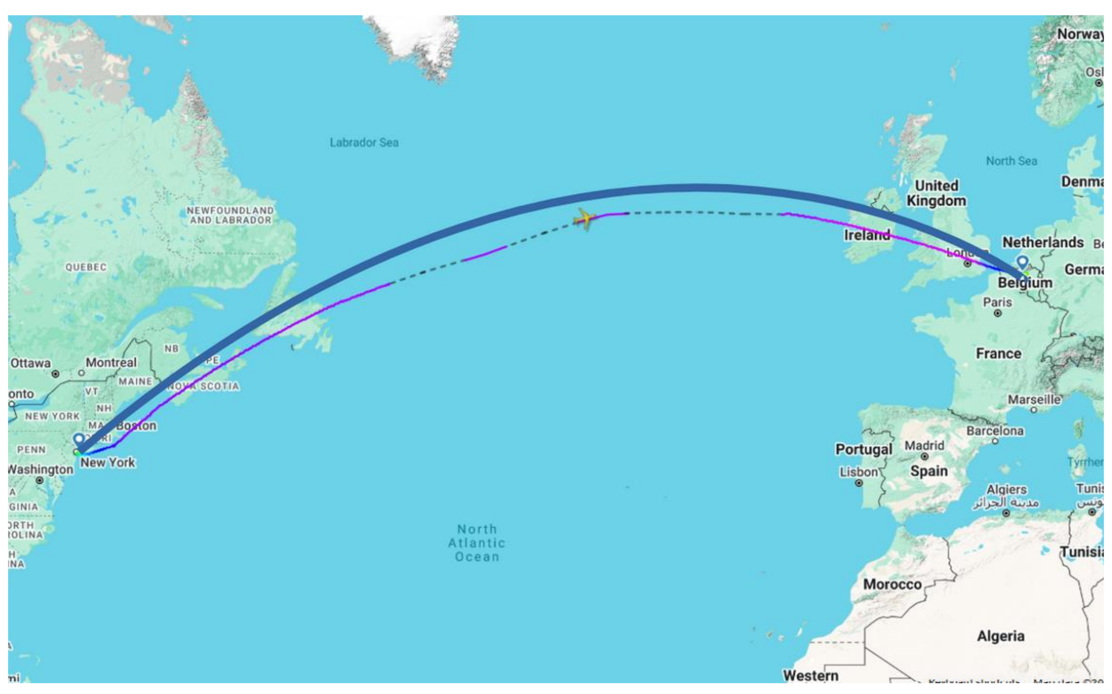
Considérons deux points distincts dans l'espace. Intuitivement, le **chemin le plus court** les reliant est une ligne droite. Dans un plan, c'est bien le cas. Mais imposons une contrainte supplémentaire : le trajet doit rester confiné à une surface courbe comme une sphère ou un cylindre.
Les trajectoires minimisant la distance entre deux points tout en respectant cette contrainte sont appelées **géodésiques**. Contrairement aux lignes droites dans l'espace euclidien, ces chemins peuvent suivre des trajectoires inattendues, défiant parfois l'intuition.



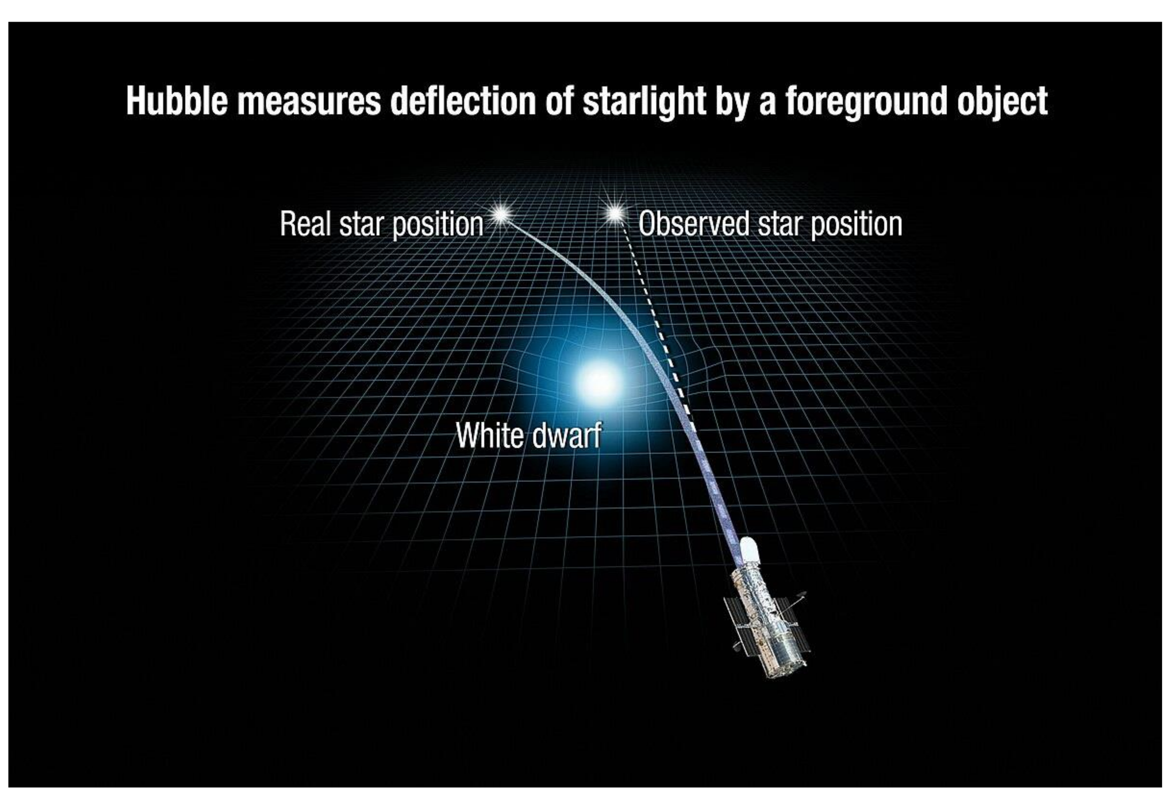
Un plan plat
Les lignes droites sont exactement les géodésiques. La mathématique vérifie notre intuition

La sphère
Les grands cercles sont les géodésiques de la sphère. On les obtient en basculant l'équateur de la sphère jusqu'a ce qu'il passe par les deux points.





Vraies données d'une route prise par un avion (num. de vol: SN502, 01/03/25) entre New York et Bruxelles comparées à la géodésique liant les deux villes.
Données: FlightRadar24



A cause de la déviation de la lumière par des objets de grande masse, des astres nous paraissent aux position incorrectes.
Credit: ESA/Hubble heic2301b.jpg

Comment identifier une géodésique ?

En mathématiques, la longueur d'un chemin est définie par une fonction qui lui associe un nombre. Cette fonction se distingue des fonctions habituelles ; en effet, au lieu de transformer un nombre en un autre, elle associe une valeur numérique à une fonction.

Un outil classique dans l'optimisation de chemin entre deux points *A* et *B*, est d'en chercher un tel que toute petite déformation possible en tout point augmenterait sa longueur. Cette méthode constitue l'un des fondements du **calcul des variations** et la définition formelle des géodésiques se repose sur cette notion d'optimisation *point par point* locale.

Cependant, ces outils ne fournissent pas toujours une unique géodésique. Par exemple, dans le cas de la sphère, les géodésiques se trouvent le longs des grands cercles. Cela signifie que pour toute paire de points, on trouve deux géodésiques candidates. Or, en observant l'exemple ci-dessus, il apparaît clairement que c'est l'arc rouge, et non l'arc bleu, qui minimise la longueur. En termes mathématiques, on distingue donc les solutions **localement** minimales de celles **globalement** minimales.

Applications et ouverture

Dans le domaine du **transport** et de la **planification des itinéraires**, les géodésiques jouent un rôle fondamental. Elles représentent les chemins **minimisant la distance et la consommation de ressources.** C'est pourquoi, lors d'un vol entre l'Europe et la Californie, la trajectoire empruntée survole le Groenland : elle suit un arc de grand cercle, correspondant à la plus courte distance sur la sphère terrestre.

En outre, les géodésiques occupent également une place centrale dans la théorie de la relativité générale, selon laquelle tout corps massif déforme la structure de l'espace-temps, à l'image d'un objet posé sur un tissu élastique. Ainsi, les trajectoires suivies par tous les corps sont contraintes par cette courbure dans un espace-temps à quatre dimensions.

Les géodésiques décrivent les trajectoires que la lumière suit lorsqu'elle est déviée par des objets massifs, tels que les étoiles ou les trous noirs, un phénomène connu sous le nom de **lentille gravitationnelle**.