Surfaces minimales et géodésiques

Printemps de Sciences 2025

Maximilian JORDAN, Pauline RIOS,
Emi ROSENBAUM et Ashe VAZQUEZ NUNEZ

17 Mars 2025

1 Introduction

En mathématiques, une surface est obtenue par une déformation lisse d'une surface bidimensionnelle dans un espace tridimensionnel. Une illustration intuitive de ce phénomène consiste à courber une feuille de papier pour lui donner une forme cylindrique. Cette déformation peut être décrite par une paramétrisation φ qui, à chaque point de $\mathbb{R}^2$ associe un point de $\mathbb{R}^3$.

Les notions de *surface minimale* et *géodésique* découlent d'une nécessité d'étudier les phénomènes d'optimisation en géométrie différentielle, où l'on cherche à minimiser respectivement l'aire et la longueur sous certaines contraintes imposées par la courbure et la topologie de l'espace ambiant. Voici deux exemples pour illustrer :

— **Géodésique : Vol Buxelles - New York** : Le trajet le plus court entre Bruxelles et New York en avion suit un arc de grand cercle, qui est une géodésique sur la sphère terrestre. Bien que non rectiligne sur une carte plane, cette trajectoire minimise la distance parcourue sur le globe.

— **Surfaces minimales : Construction d'un toit** : La construction d'un toit sous contrainte matérielle est bien un problème de recherche de surface minimale puisque minimiser la quantité de matériaux revient à minimiser l'aire du toit ; c'est le *problème de Plateau.*

2 Géodésiques

Soit S une surface. Une courbe $\gamma : I \to S$ qui représent un parcours de chemin sur la surface au fils du temps, est appelée *géodésique* si elle suit naturellement la géométrie de la surface [1]. Toute courbe sur une surface possède une accélération qui se décompose en deux composantes : l'une dans la direction tangente à la courbe (et donc à la surface) et l'autre dans la direction perpendiculaire. Dans le cas des géodésiques, la composante tangentielle de l'accélération est nulle, ce qui signifie que la direction de la courbe ne change pas sur la surface. Autrement dit, sur une surface plate comme une feuille, une géodésique correspond à une ligne droite.

1. Très formellement, on dit que $\gamma : I \to S$ est une *géodésique* si elle suit naturellement la géométrie de la surface sans subir d'accélération intrinsèque :

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

où ∇ est une connexion affine, c'est-à-dire une structure mathématique qui permet de définir une notion de dérivée directionnelle d'un champ de vecteurs sur une variété différentielle. Cela signifie que, en tout point de la courbe, l'accélération n'a aucune composante dans le plan tangent à la surface. Autrement dit, le vecteur normal à la courbe est entièrement orthogonal à la surface en chaque point.

3 Surfaces minimales

Considérons dans un premier temps une fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et un point $x \in \mathbb{R}$. En optimisation, la recherche de points minimaux repose sur l'idée que tout minimum global est aussi un minimum local. Autrement dit, si $x \in \mathbb{R}$ est un minimum local de f, alors toute déviation de x, aussi petite qu'elle soit, entraîne nécessairement une augmentation de f (par rapport à $f(x)$). Formellement, cela signifie que la dérivée de la fonction doit s'annuler en x. Ce principe fournit un critère essentiel pour identifier les candidats à un minimum.

Cette approche peut être adaptée au cas des surfaces minimisant l'aire. En effet, bien que les surfaces ne soient pas des fonctions, elles peuvent être décrites par des fonctions dérivables à partir desquelles on peut calculer leur aire.

Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$ et $\{\varphi_t : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\}_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de fonctions qui déforment S en S_t et où φ_0 paramétrise la surface initiale S (c'est-à-dire que $\varphi_0(U) = S$). La fonction d'aire associée est définie par :

$$A(t) = \int\int_U \left\| \frac{\partial \varphi_t}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_t}{\partial v} \right\| dudv$$

Alors, S est *minimale* si

$$\frac{d}{dt} A(t)\Big|_{t=0} = 0$$

Cela signifie que S est un point critique pour l'aire sous des perturbations infinitésimales, ce qui est une condition nécessaire pour être une *surface d'aire minimale locale.*

La *courbure* d'une surface quantifie son degré de déformation. En particulier, on appelle *courbure principale* les courbures maximales et minimales que l'on peut observer en un point donné d'une surface, selon deux directions perpendiculaires. Sur une surface minimale, les courbures principales sont opposées en tout point. Cela signifie qu'aucune région de la surface ne présente de convexité ou de concavité dominante.

4 Expériences et enseignements

Les principes fondamentaux que nous cherchons à illustrer sont les suivants :

— Une surface minimale ne peut pas être concave. Toute surface qui admet une concavité peut être applatie, ce qui entraîne une diminution de son aire.

— Une surface, ou une courbe, est optimal (localement) si et seulement si toute modification infinitésimale entraîne une détérioration de la solution. Dans le cas d'une surface minimales, cela revient à dire que toute variation locale augmente son aire. Dans le cas des géodésiques, toute variation locale augmente sa longueur.

— Une surface minimale n'est pas nécessairement la meilleure parmi toutes les surfaces possibles qui recouvrent un contour donné. En effet, l'optimalité locale ne garantit pas l'optimalité globale. Il est en même pour les géodésiques : le chemin le plus court *localement* n'est pas forcément le chemin le plus court *globalement.*

Ces principes seront illustrés à travers des expériences interactives, permettant aux élèves d'assimiler des notions abstraites de manière ludique. L'objectif sera, dans un premier temps, de les impliquer activement en les invitant à choisir, parmi plusieurs surfaces et chemins possibles, celui qui leur semble optimal. Ensuite, les expériences pratiques leur permettront de confronter leurs intuitions aux réalités mathématiques, et de 'toucher' . Pour cela, différents supports seront utilisés, tels que des bulles de savon et un globe terrestre, afin d'explorer concrètement les concepts abordés.