Les probabilités, une science aussi claire que l'eau !

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES – FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Simão DIAS PINTO, Carelle KAMMEGNE JIDJOU, Augustine LEGRAND, Bilkissou NGUEKENG DJAKA et Célestin PEMMERS

Introduction :

Les jeux de société sont une excellente manière de s'amuser tout en développant des compétences logiques et stratégiques. Mais que se passe-t-il lorsqu'on ajoute un peu de probabilités et statistiques derrière ces jeux apparemment simples ? En effet, les mathématiques sont présentes dans de nombreux aspects de notre vie quotidienne, y compris dans les jeux de société que l'on pourrait penser être purement basés sur la chance.

En réalité, elles nous offrent des outils puissants pour analyser des situations, comprendre les mécanismes sous-jacents et, dans certains cas, même améliorer nos chances de succès.

Quelques définitions :

Une variable aléatoire X est une façon mathématique de modéliser un phénomène incertain. C'est une valeur qui dépend du hasard. Par exemple : Quand on lance un dé, le résultat X peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Donc X est une variable aléatoire.

Une loi de probabilité, c'est simplement une règle qui nous dit à quelle fréquence on s'attend à voir chaque valeur d'une variable aléatoire. Par exemple, si on lance un dé équilibré, chaque face a 1 chance sur 6 d'apparaître.

Deux événements A et B sont indépendants si : $P(A \cap B)=P(A).P(B)$

Théorèmes importants en probabilité :

Nous nous sommes d'abord intéressés à des résultats très importants en probabilité.

Le **théorème central limite** est un théorème très important qui dit que lorsque l'on additionne un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, sous certaines conditions, leur somme (ou leur moyenne) suit approximativement une loi normale, même si les variables de départ ne sont pas normales.

Nous avons pu illustrer ce théorème avec la planche de Galton, avec comme cas particulier que les variables aléatoires suivent une loi binomiale (cette loi modélise le nombre de succès obtenus à probabilité p lors de la réalisation de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes). La planche de Galton nous permet de voir visuellement cette convergence de loi binomiale vers une loi normale.

Un autre résultat important est la **loi des grands nombres.** Celui-ci nous dit que si on réalise un grand nombre d'expériences aléatoires, la moyenne des résultats se rapproche de la moyenne théorique attendue.

Pour bien comprendre cette loi, nous avons réalisé une simulation avec des dés. Si l'on lance un dé à 6 faces plusieurs fois et que l'on calcule la moyenne des résultats, on constate que cette moyenne tend (ou converge) vers 3,5, qui est l'espérance théorique pour un dé équilibré. Cela signifie que, si l'on lance suffisamment de fois un dé équilibré, la moyenne des résultats devrait se rapprocher de ce chiffre. Si, en revanche, la moyenne obtenue diffère de manière significative de 3,5, cela peut indiquer que les dés sont pipés, car dans ce cas, les probabilités de chaque face ne seraient pas égales à 1/6.

Nous nous sommes ensuite intéressés à une autre loi limite.

La loi stationnaire et le Monopoly :

Quelle est la case la plus optimale au Monopoly ? Quelle case faut-il viser et acheter le plus rapidement pour pouvoir avoir le plus de chances de gagner ? Les probabilités peuvent répondre à ces questions. Pour cela, nous devons introduire des notions plus compliquées.

Les déplacements du joueur sur le plateau dépendent du lancer de dés. On peut modéliser cela à l'aide d'une chaîne de Markov, un modèle mathématique qui décrit des systèmes dans lesquels le futur dépend uniquement de l'état actuel et non de l'historique des états précédents. Autrement dit, dans une chaîne de Markov, les déplacements d'un joueur (ou les transitions entre les cases) ne dépendent que de la case où il se trouve actuellement, et non des cases qu'il a traversées avant. Cela simplifie le modèle, car il suffit de connaître la position actuelle du joueur pour prédire ses futurs déplacements, sans se soucier de la manière dont il est arrivé là.

Au fur et à mesure que le jeu avance, certaines cases sont plus visitées que d'autres, et cela peut être déterminé grâce à la distribution stationnaire. Cette distribution nous montre la répartition de la probabilité d'être sur chaque case après un grand nombre de tours, lorsque le jeu est stable. Cela permet de déterminer quelles cases sont les plus susceptibles d'être visitées, et donc, celles qui sont stratégiquement intéressantes à acheter.