

La loi de Gumbel

1 Introduction à la Loi de Gumbel

La **loi de Gumbel** est une distribution probabiliste spécialement conçue pour étudier les événements rares ou extrêmes. Les méthodes classiques fonctionnent bien pour étudier les phénomènes habituels, mais pas lorsqu'il s'agit d'événements exceptionnels.

Cette loi permet de répondre clairement à deux types de questions importantes :

◇ **Quelle est la probabilité qu'un événement extrême arrive ?**

Par exemple, quelle est la probabilité que le niveau d'une rivière dépasse 2 mètres sur une période de 100 ans ? Si la loi de Gumbel donne une probabilité de 5 %, cela signifie que chaque 100 ans, il y a une chance de 5 % que la rivière dépasse ce niveau critique.

◇ **Quel seuil critique correspond à une probabilité fixée ?**

Par exemple, quel est le seuil que la rivière ne dépassera qu'avec une chance de 1 % sur une période de 100 ans ? Ce seuil (appelé quantile à 99 %, on en reparlera plus tard) nous indique une valeur au-delà de laquelle l'événement est très rare, mais possible.

Ainsi, la loi de Gumbel nous aide à mesurer les risques et à mieux anticiper ces événements rares.

2 Course de gouttes

◇ **Course de gouttes :**

On réalise une course avec 10 gouttes d'eau. **Chaque goutte suit une loi exponentielle et est i.i.d.**. Cela signifie que chaque goutte a la même distribution probabiliste et que les résultats de chacune n'influencent pas celles des autres.

◇ **Sélection de l'événement extrême :**

Dans chaque course, nous nous intéressons uniquement à l'**événement extrême** : la distance maximale parcourue par l'une des gouttes. C'est cette distance maximale qui représente un événement rare et significatif dans notre étude.

◇ **Constitution de la base :**

En répétant la course 1000 fois, nous obtenons 1000 distances maximales. Ces 1000 observations forment notre **base de données**, c'est-à-dire la collection de toutes nos mesures d'événements extrêmes.

◇ **Visualisation par un histogramme :**

• **Qu'est-ce qu'un histogramme ?**

Un histogramme est un graphique qui aide à visualiser comment vos données se répartissent. Il transforme une grande liste de nombres en un graphique à lire.

• **Comment ça marche ?**

- ★ D'abord, imaginez que vous avez mesuré 1000 distances maximales.
- ★ On regroupe ces valeurs en plusieurs tranches d'intervalles. (Par exemple, toutes les distances entre 0 et 5 cm forment un groupe, celles entre 5 et 10 cm un autre, etc.)
- ★ Pour chaque groupe, on compte combien de mesures s'y trouvent.
- ★ Ensuite, on dessine une barre pour chaque groupe : plus il y a de mesures dans un groupe, plus la barre est haute.

• **Pourquoi c'est utile ?**

L'histogramme vous permet de voir rapidement :

- ★ Où se concentrent la plupart des mesures.
- ★ Si certaines plages de valeurs sont très rares ou très fréquentes.

◇ La Fonction de Densité Théorique

- La loi de Gumbel nous donne une **courbe théorique** qui décrit la répartition des distances maximales.
- Cette **fonction de densité** est une ligne qui montre, pour chaque distance, à quel point il est probable d'observer des valeurs proches.
- La hauteur de la courbe à un point précis indique la "fréquence" attendue autour de cette valeur.
- En superposant cette courbe sur l'histogramme de nos 1000 distances maximales, si la courbe suit la silhouette de l'histogramme, alors la loi de Gumbel modélise bien les données observées.
- Cette courbe nous permet aussi de prédire la probabilité d'obtenir des distances que nous n'avons pas directement observées.

◇ Fonction de répartition :

Après avoir obtenu notre fonction de densité (la courbe lisse qui modélise la répartition des distances maximales des gouttes), on peut l'intégrer pour obtenir la fonction de répartition, $F(x)$, qui nous donne la probabilité qu'une goutte ait parcouru au maximum x cm.

Par exemple, si $F(15) = 0.78$, cela signifie que pour 78% des courses, la distance maximale est inférieure ou égale à 15 cm.

◇ Quantiles :

Alors que la fonction de répartition donne une probabilité pour une valeur donnée, le quantile nous donne une valeur pour une probabilité donnée.

Par exemple, si le quantile à 85% vaut 18 cm, cela signifie que dans 85% des courses, la distance maximale est de 18 cm ou moins, ainsi dans les 15% des courses restantes, on est à plus de 18 cm.

Un Qr code contenant un code python pour visualiser cette expérience, ainsi que deux affiches explicatives de la loi de Gumbel, est disponible ci dessous.



Figure 1: Qr code

3 Conclusion

La loi de Gumbel est un outil fondamental en statistique des valeurs extrêmes. Son lien avec la loi exponentielle permet de mieux comprendre son apparition dans divers contextes. Son application en hydrologie pour modéliser les crues montre son importance dans l'analyse des phénomènes rares et extrêmes.