Les géométries non-euclidiennes

Lenny RANSY, Daniel AZEVEDO MOREIRA SILVEIRA CABECA, Mohamad CHANAA, Ruben DE PAIVA MOTA, Samantha TRAN, Sinclair TSANA FOBING, Ilias ZAHAFI, Camelia ZGHEREA.

Mars 2024

1. La géométrie euclidienne

Pour déduire des propriétés géométrique dans le monde qui nous entoure, il est nécessaire que tout les mathématiciens soient d'accord sur les bases, c'est à dire les définitions et les postulats. Les 5 postulats d'Euclide ont alors servi de base sur laquelle la plupart des mathématiciens de l'Antiquité se sont basés, ce qui a permis de montrer beaucoup de propriétés. Aujourd'hui, celles-ci sont apprises à l'école dès la primaire et construisent l'intuition géométrique de la plupart des gens.

Les 4 premiers postulats étaient bien approuvés par les mathématiciens de l'époque, mais le 5e n'a pas fait l'unanimité. Un grand nombre de mathématiciens pensaient qu'il était possible de prouver le 5e postulat à partir des 4 premiers. Un bon nombre d'entre eux ont même tenté de le montrer, mais sans succès. C'est alors que certains mathématiciens ont tenté de construire une géométrie en supposant les 4 premiers postulats vrais, mais le 5e faux.

2. La géométrie hyperbolique

C'est dans cette tentative que naît la géométrie hyperbolique. On considère toujours les 4 premiers postulats d'Euclide, mais on remplace le cinquième:

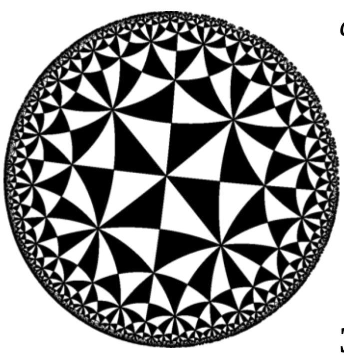
"Pour une droite et un point disjoints, il existe une unique droite parallèle passant par ce point"

par le nouveau postulat suivant:

"Pour une droite et un point disjoints, il existe une <u>infinité</u> de droites parallèles passant par ce point".

Vu comme ça, cela semble très abstrait, mais nous allons voir que nous pouvons visualiser tout ça grâce à un modèle du nom de "Disque de Poincaré".

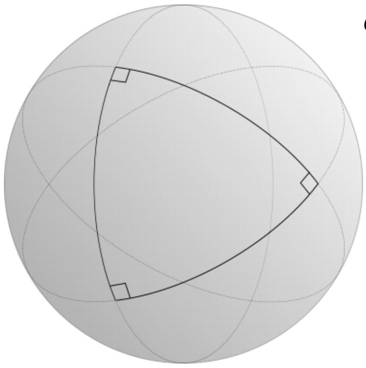
Cet environnement possède des propriétés assez surprenantes. Par exemple, tout triangle du plan hyperbolique a la somme de ses angles strictement inférieure à 180°.



3. Les géométries sphériques et elliptiques

Plaçons-nous maintenant sur la surface d'une sphère de rayon 1. Nous pouvons définir des droites et des angles sur celle-ci. Il est alors possible de vérifier si les 5 postulats d'Euclide marchent toujours. Ici, ce sont le premier et le cinquième postulats qui vont poser problème. D'ailleurs, ***aucune droite n'est parallèle à une autre*** *dans cette géométrie.*

Nous pouvons, comme en géométrie hyperbolique, déduire des propriétés intéressantes. Par exemple, tout triangle a la somme de ses angles ***strictement supérieure à 180°****. Et d'ailleurs, nous pouvons construire un triangle à 3 angles droits:*



Cette géométrie a une grande utilité en géographie, et dans l'aéronautique. Grâce à elle, nous pouvons déterminer le plus court trajet en avion entre deux endroits sur Terre (ou techniquement de n'importe quelle sphère).

Le fait que le premier postulat d'Euclide ne soit pas respecté peut être un peu embêtant. Nous pouvons alors obtenir à partir de cette géométrie sphérique en identifiant les points antipodes entre eux, la géométrie elliptique. Cette géométrie va alors respecter le premier postulat, mais toujours pas le 5e.