Printemps des Sciences 2024
Dissections Géométriques

1. Motivation

Muni de ciseaux, de colle et de papier, peut-on obtenir n'importe quelle forme? Cette question a priori insipide est pourtant cruciale. C'est en collant deux triangles que l'on déduit la formule pour leur aire. Ce même procédé permettrait-il de trouver une formule pour le calcul de l'aire de n'importe quelle forme?

Nous utiliserons ces questions pour parcourir un domaine des mathématiques qui à contribuée au développement du calcul intégrale et de la théorie de la mesure, et qui a mené à la remise en question des fondements même des mathématiques.

2. Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien

Étant donné deux polygones de même aire, peut-on toujours découper l'un pour obtenir l'autre?
La réponse est oui. Pour le voir, nous expliquerons l'algorithme qui permets de le faire.
Cependant, cet algorithme utilise un grand nombre de pièces. Quel est le nombre minimal de pièces nécessaire pour découper (et recoller) un triangle en carré? Nous vous laisserons essayer par vous-même, après avoir donnés quelques techniques qui permettent de réduire le nombre de pièces d'un découpage.

3. Troisième Problème de Hilbert

Le problème précédent s'étend naturellement en dimension 3. Est-ce que deux polyèdres de même volume peuvent toujours être découpés l'un en l'autre? Cette question figurait parmi les 23 problèmes d'Hilbert, publiés en 1902 et qui eurent une grande influence sur le développement des mathématiques au $20^{\text{ème}}$ siècle. Ce qui est remarquable, c'est que la réponse est différente dans le plan et dans l'espace. Max Dehn, étudiant d'Hilbert, montra qu'on ne peut pas toujours découper un polyèdre en n'importe quel autre de même volume. Nous expliquerons comment ceci a été démontré, et quelle condition supplémentaire est nécessaire pour qu'un découpage soit possible dans ce cas.

4. Paradoxe de Banach-Tarski

À la place de n'utiliser que des découpages de type "ciseaux," on admets maintenant aussi des dissections ensemblistes (i.e.. on permets de choisir des ensembles de points comme morceaux). Dans ce cas, les choses se compliquent. En effet, Banach et Tarski ont montrés qu'on peut alors décomposer une boule en moins de 10 morceaux, et les réarranger pour former deux nouvelles boules identiques à la première! Ce résultat extrêmement contre-intuitif est souvent qualifié de paradoxe et a causé une remise en question des axiomes même des mathématiques.

Nous donnerons quelques idées sur comment ce découpage est construit, et nous discuterons de pourquoi cela est possible.