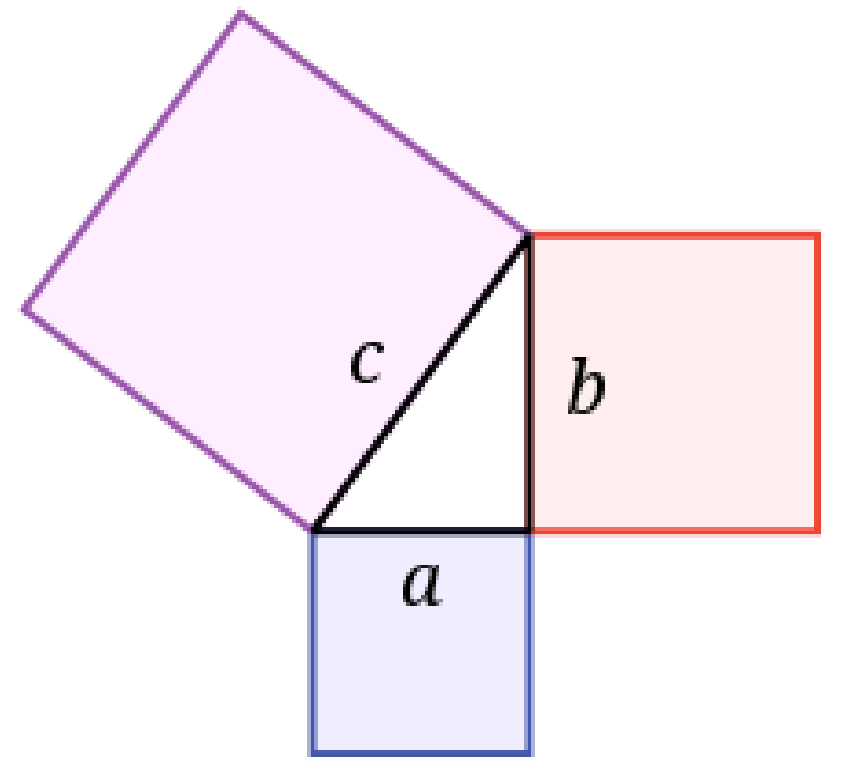


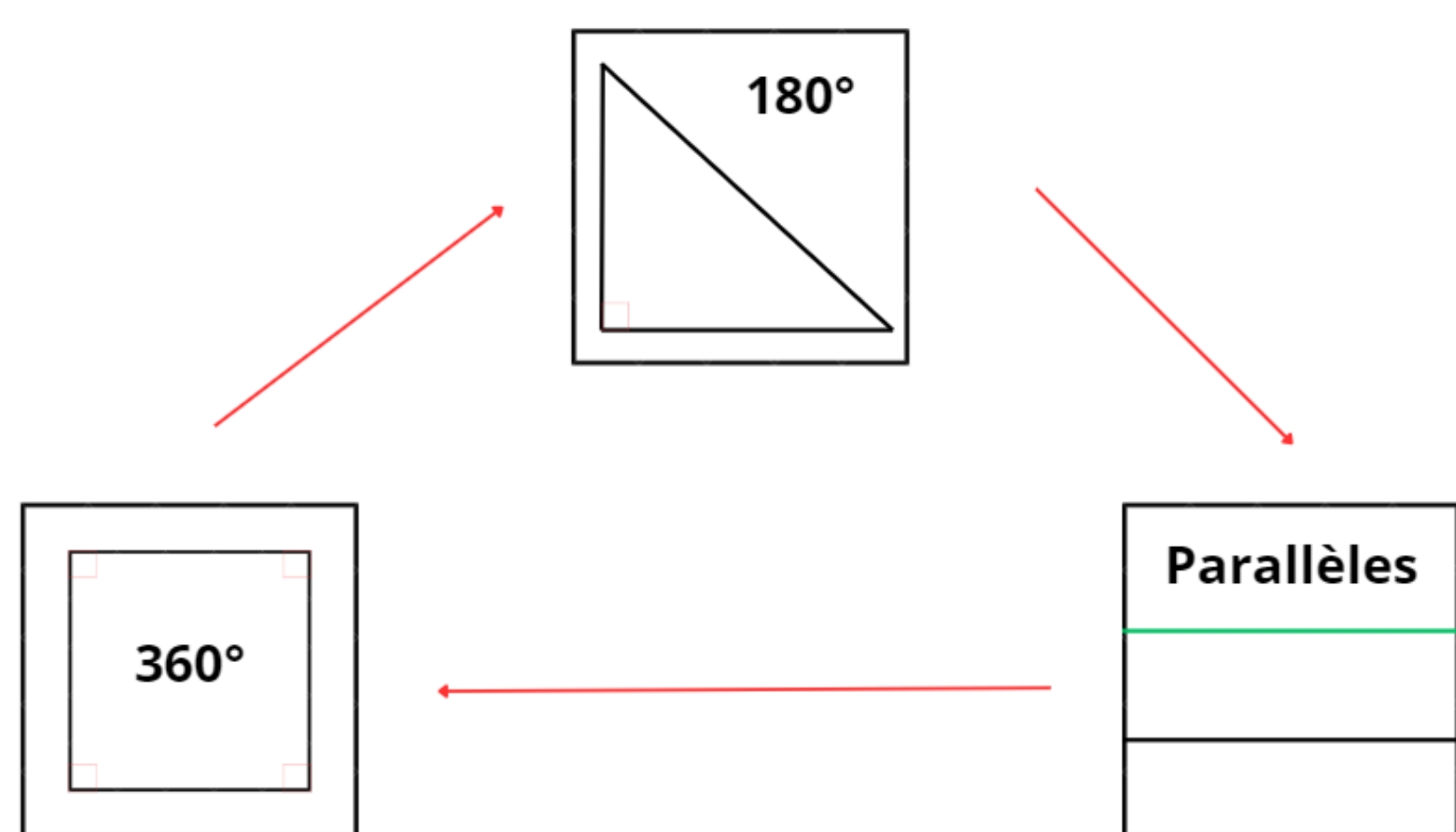
## Géométrie euclidienne

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

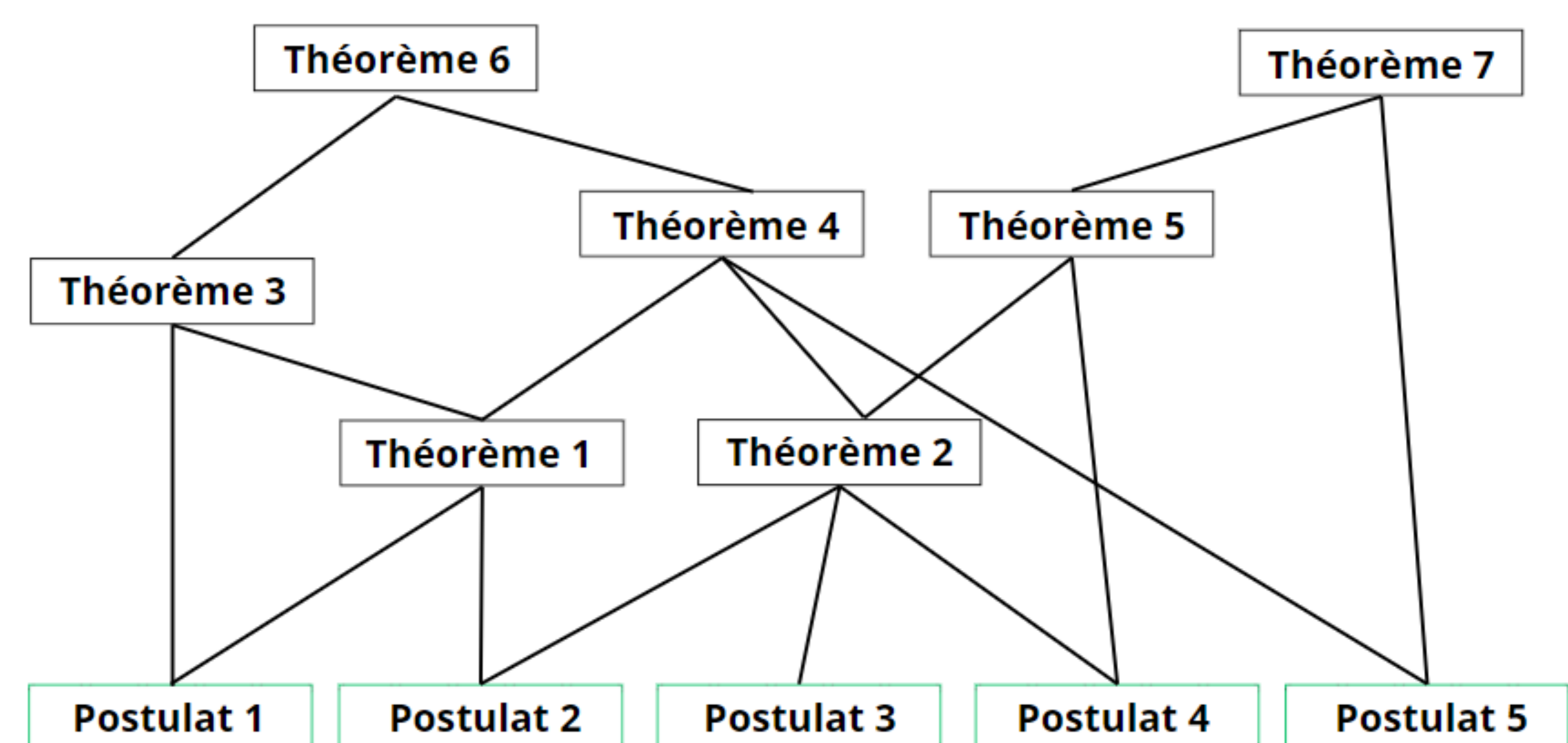
Camelia ZGHEREA, Daniel AZEVEDO MOREIRA SILVEIRA CABEÇA, Ilias ZAHAFI, Lenny RANSY, Mohamad CHANAA, Ruben DE PAIVA MOTA, Samantha TRAN, Sinclair TSANA FOBING



### Raisonnement circulaire



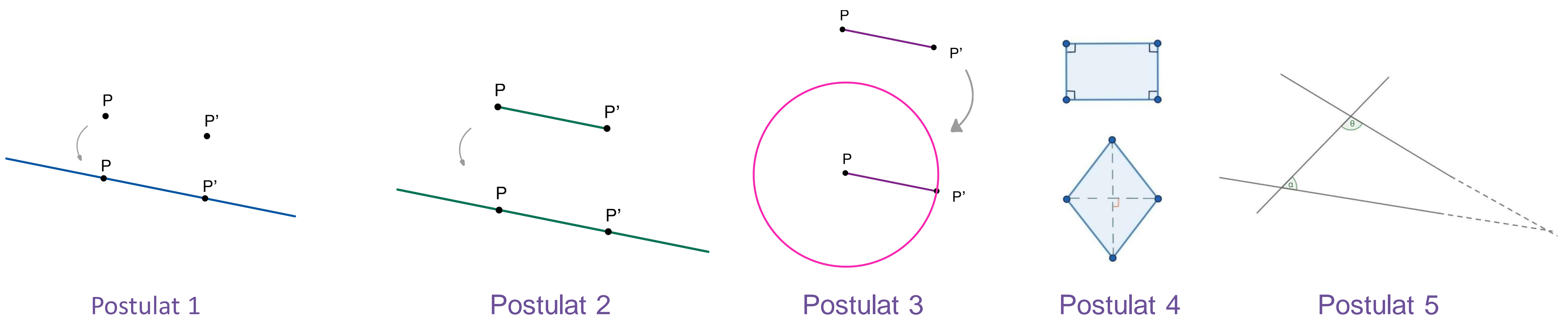
### Démarche axiomatique



La méthode axiomatique utilise des axiomes de base pour déduire logiquement d'autres propositions.

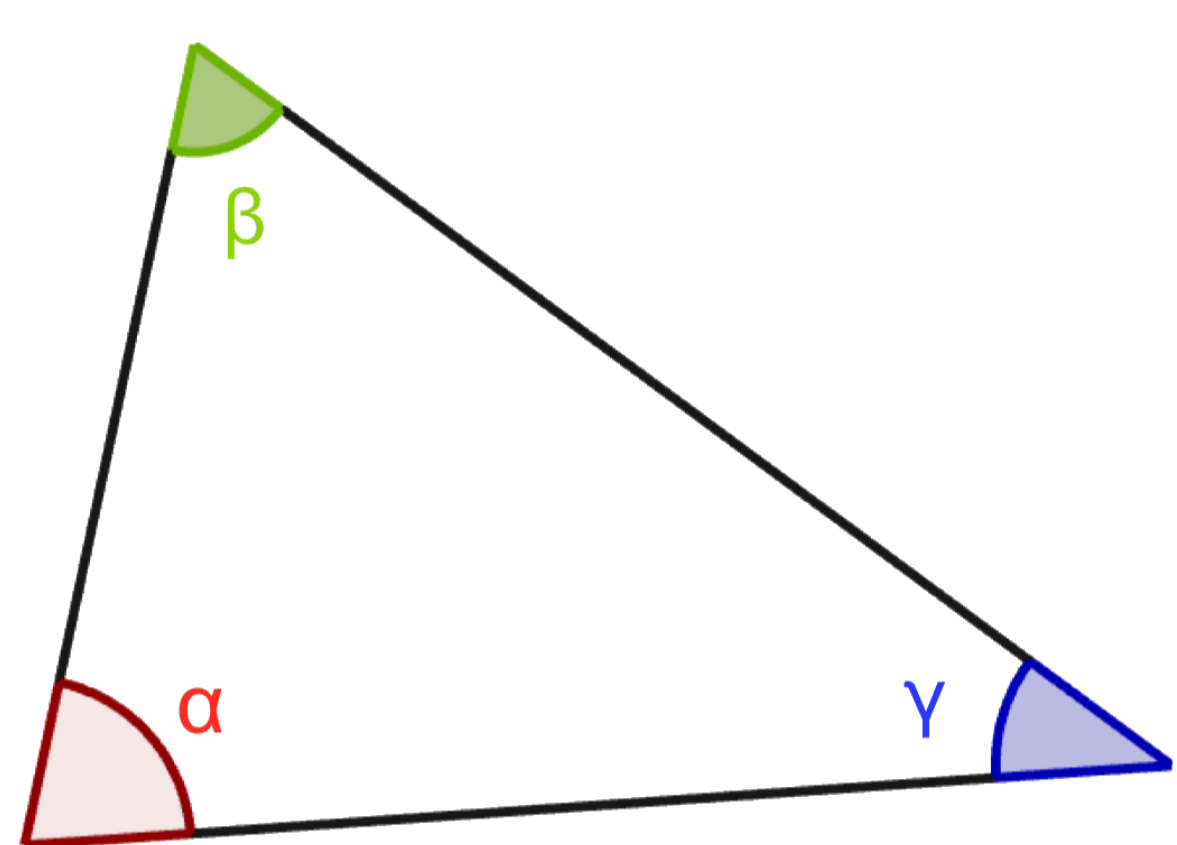
### POSTULATS D'EUCLIDE

1. Il existe toujours une unique droite qui passe par deux points du plan.
2. Toute droite peut être prolongée indéfiniment et continûment.
3. À partir d'un segment, il existe un cercle dont le centre est un des points du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. **SI UNE DROITE, TOMBANT SUR DEUX DROITES, FAIT LES ANGLES INTÉRIEURS DU MÊME CÔTÉ PLUS PETITS QUE DEUX DROITS, CES DROITES, PROLONGÉES À L'INFINI, SE RENCONTRERONT DU CÔTÉ OÙ LES ANGLES SONT PLUS PETITS QUE DEUX DROITS.**

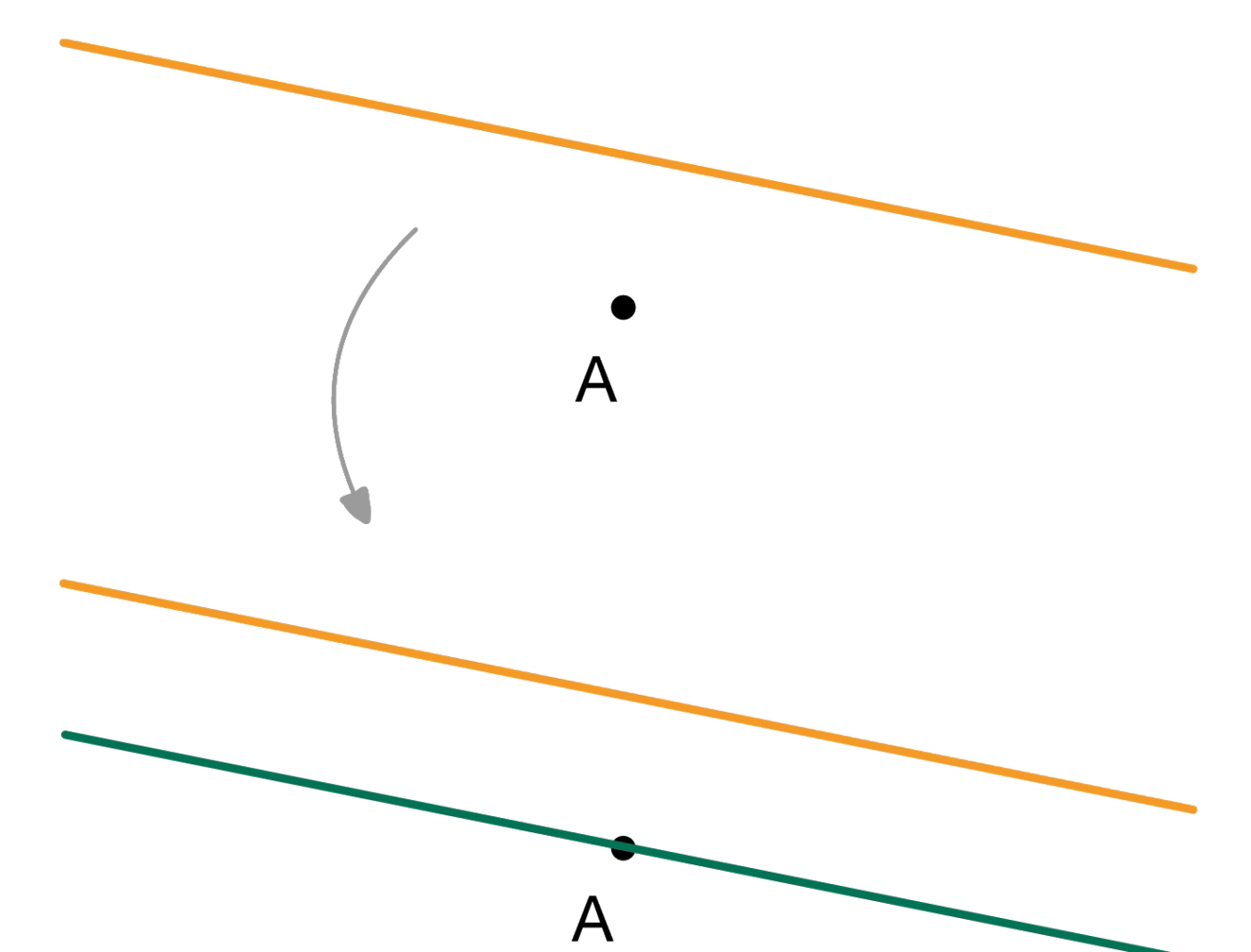
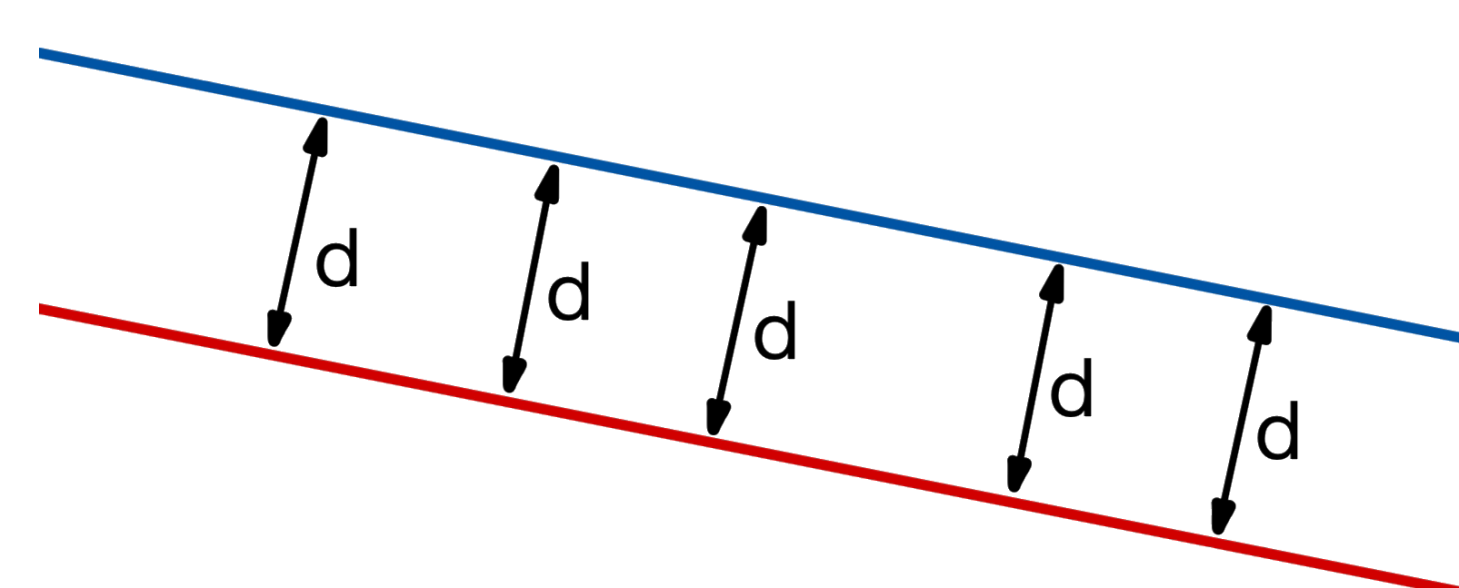
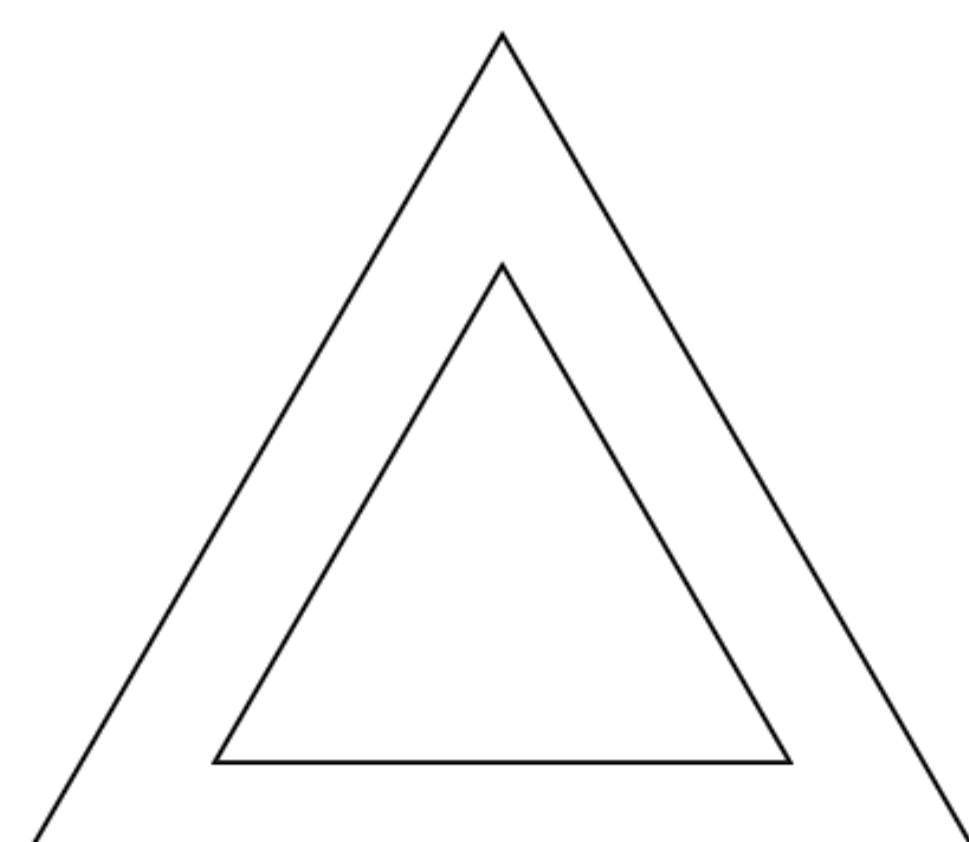


### ÉQUIVALENCES DU 5<sup>e</sup> POSTULAT

- La somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ .
- Il existe une paire de triangles semblables mais non congruents.
- Il existe une paire de droites telle que leur distance est partout constante.
- Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

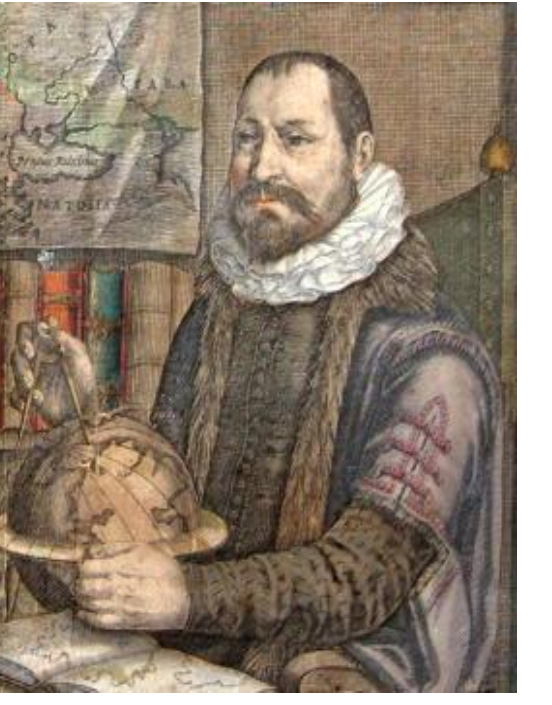






## Géométrie sphérique

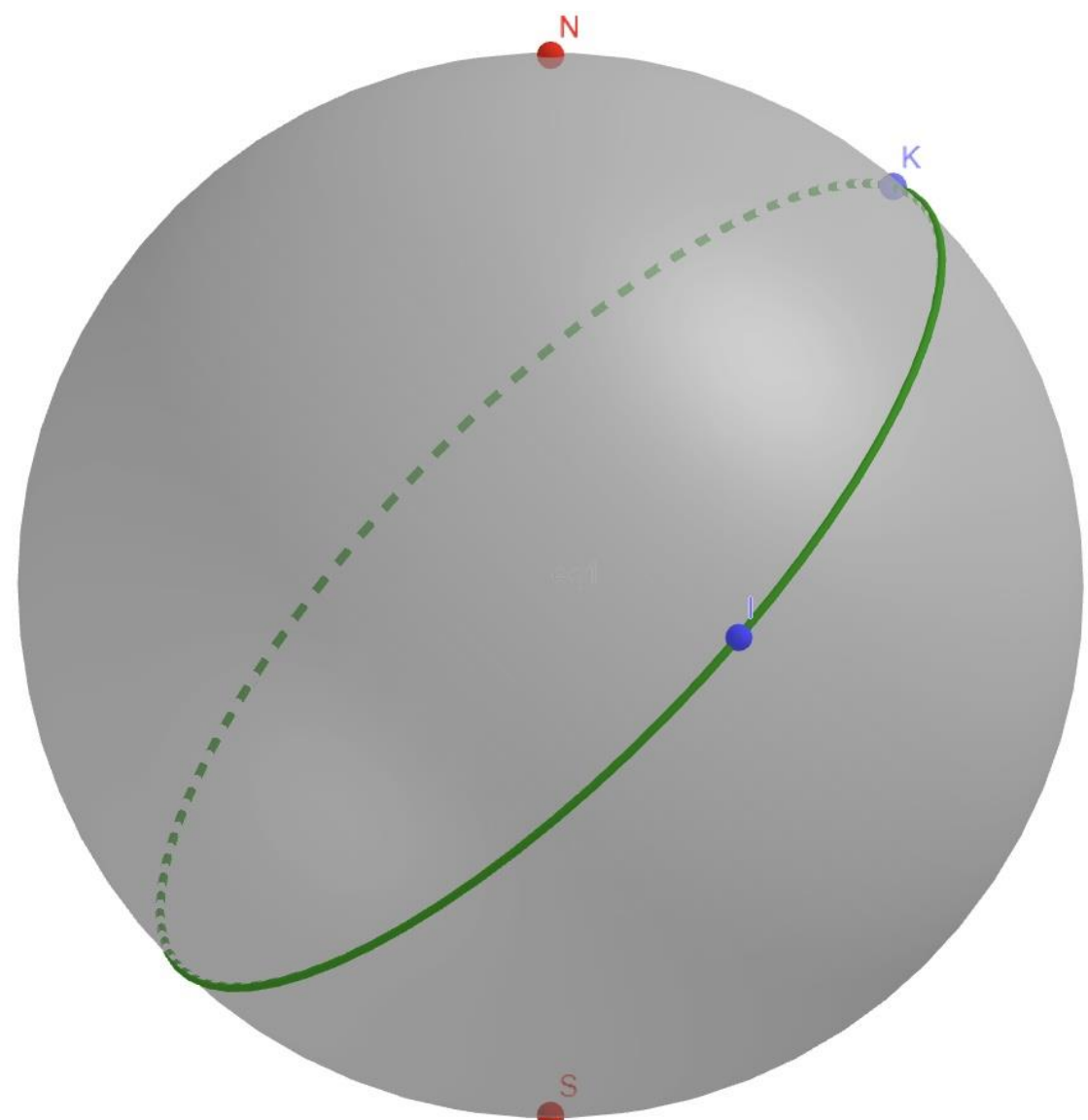
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



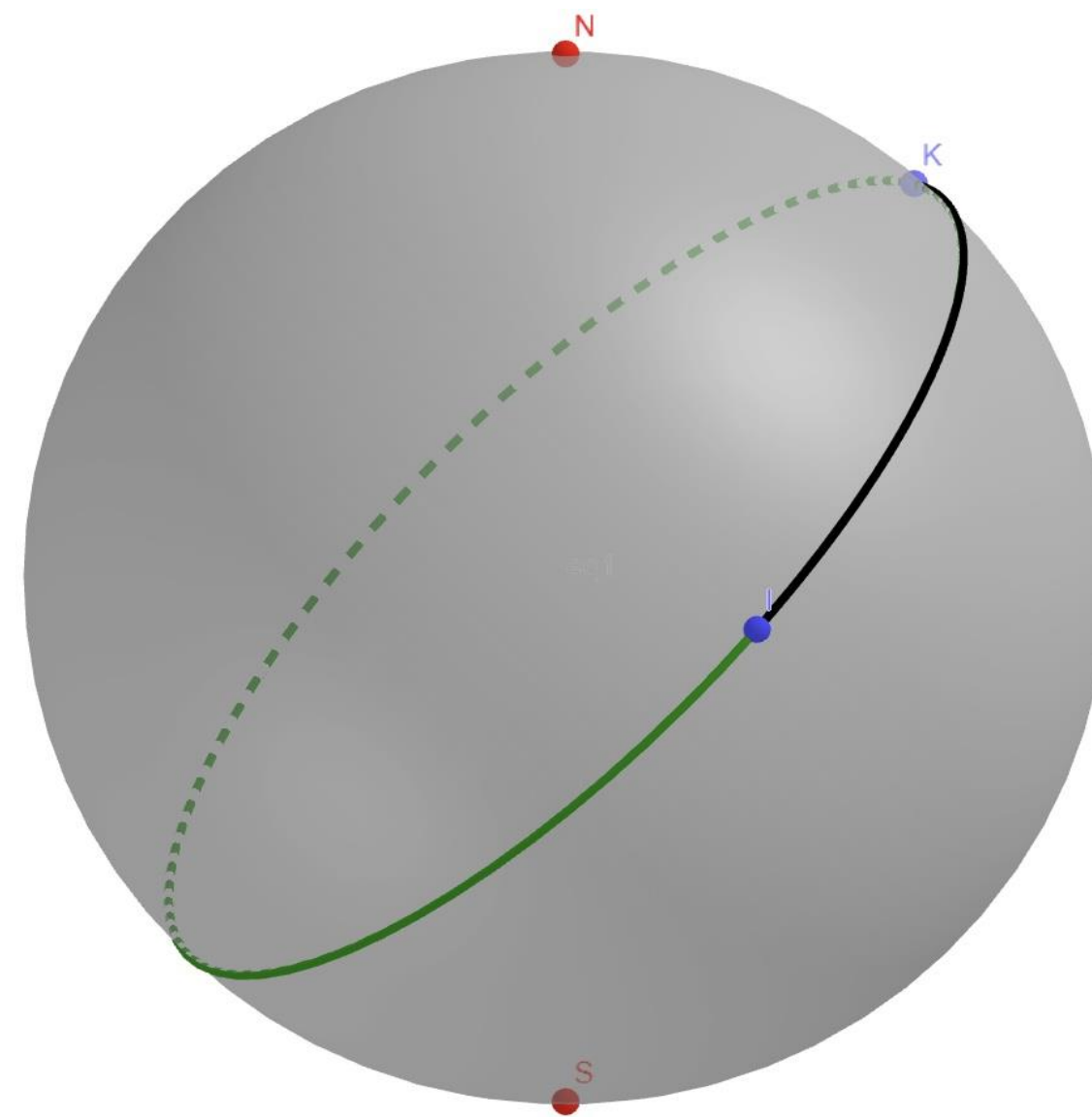
Camelia ZGHEREA, Daniel AZEVEDO MOREIRA SILVEIRA CABEÇA, Ilias ZAHAFI, Lenny RANSY, Mohamad CHANAA,  
Ruben DE PAIVA MOTA, Samantha TRAN, Sinclair TSANA FOBING

La géométrie sphérique est une géométrie SANS parallèles

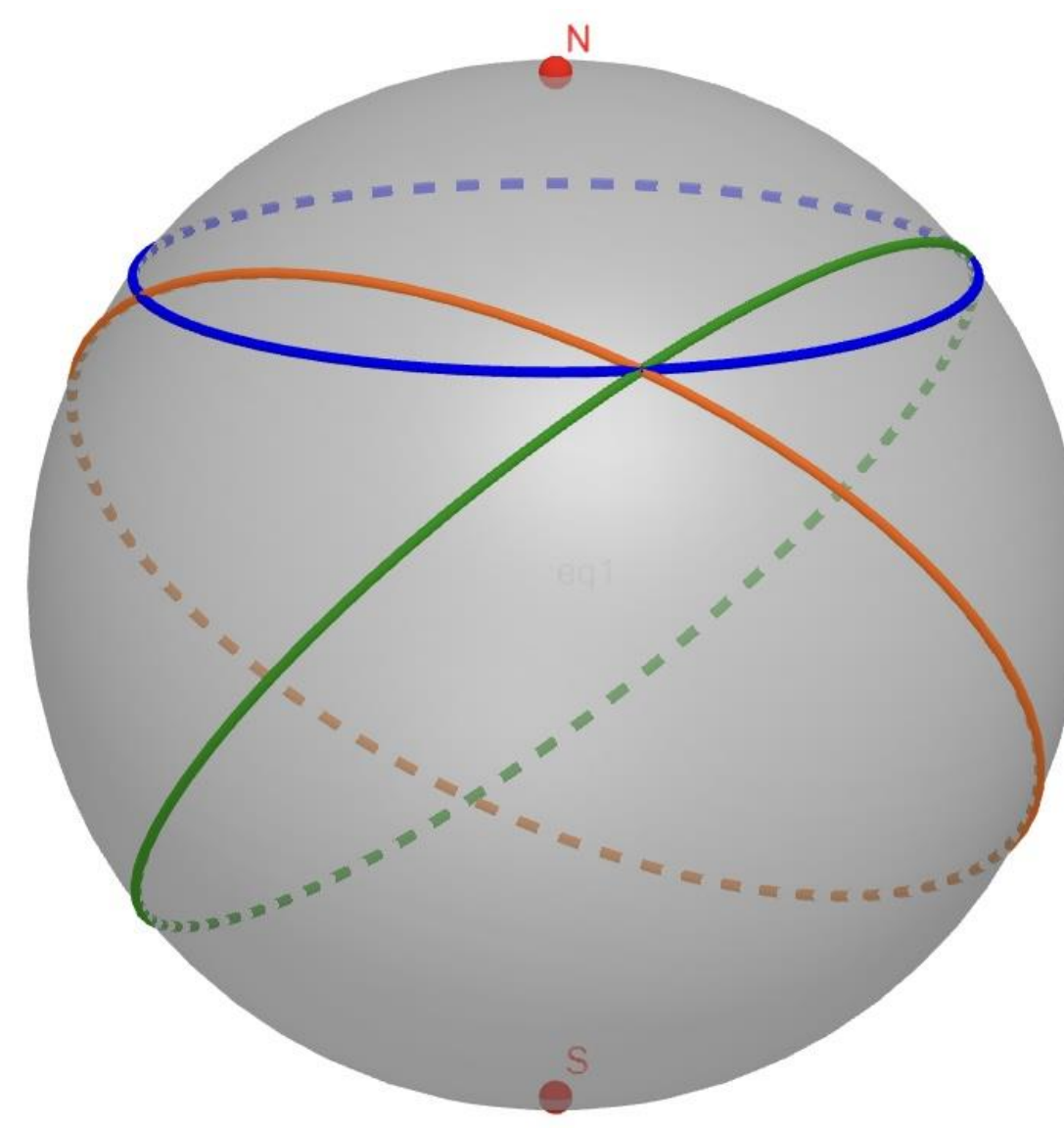
### Les cinq postulats d'Euclide en géométrie SPHÉRIQUE



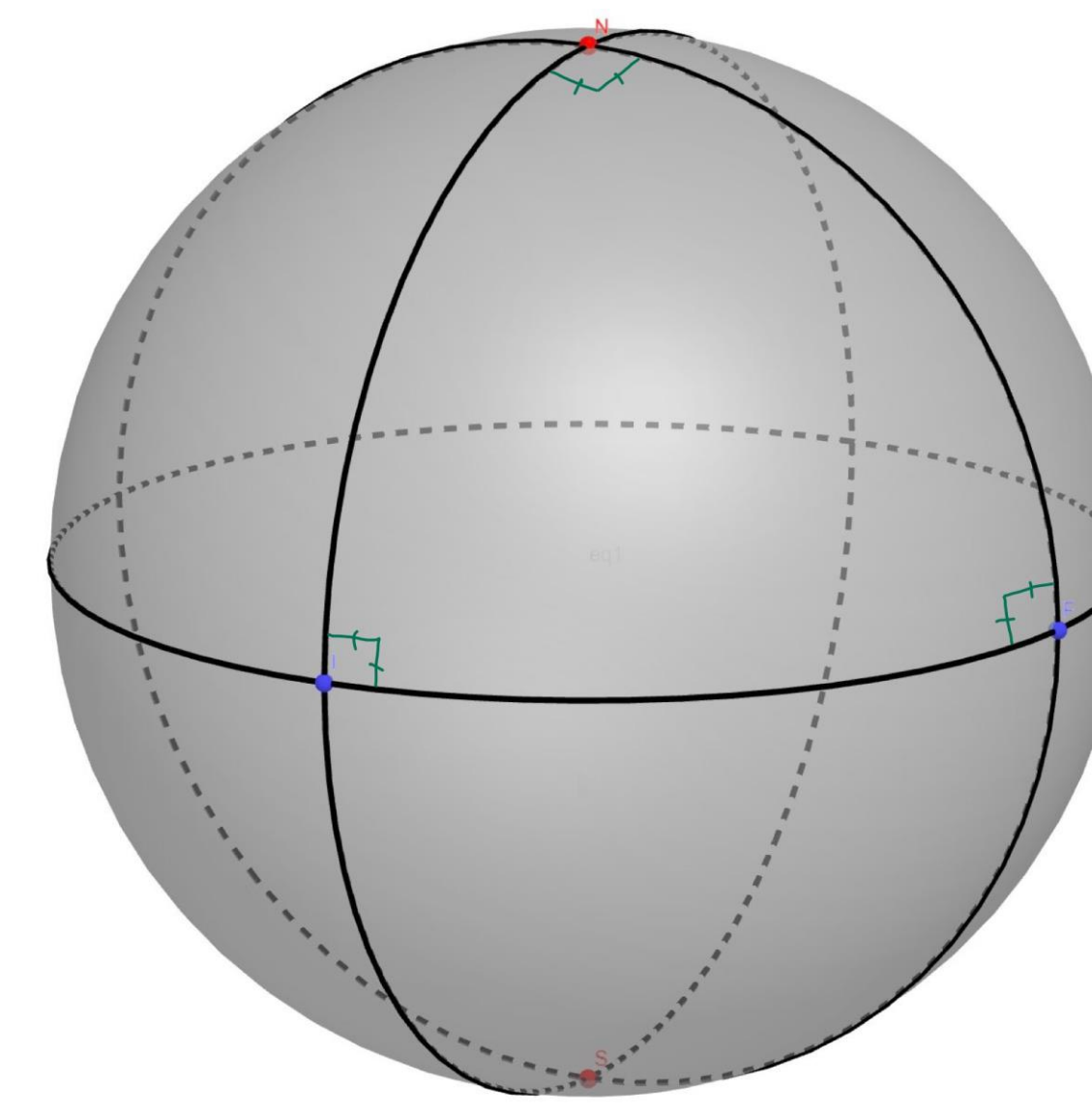
**1<sup>er</sup> postulat**  
Par chaque couple de points qui ne sont pas antipodaux passe un et un seul grand cercle.



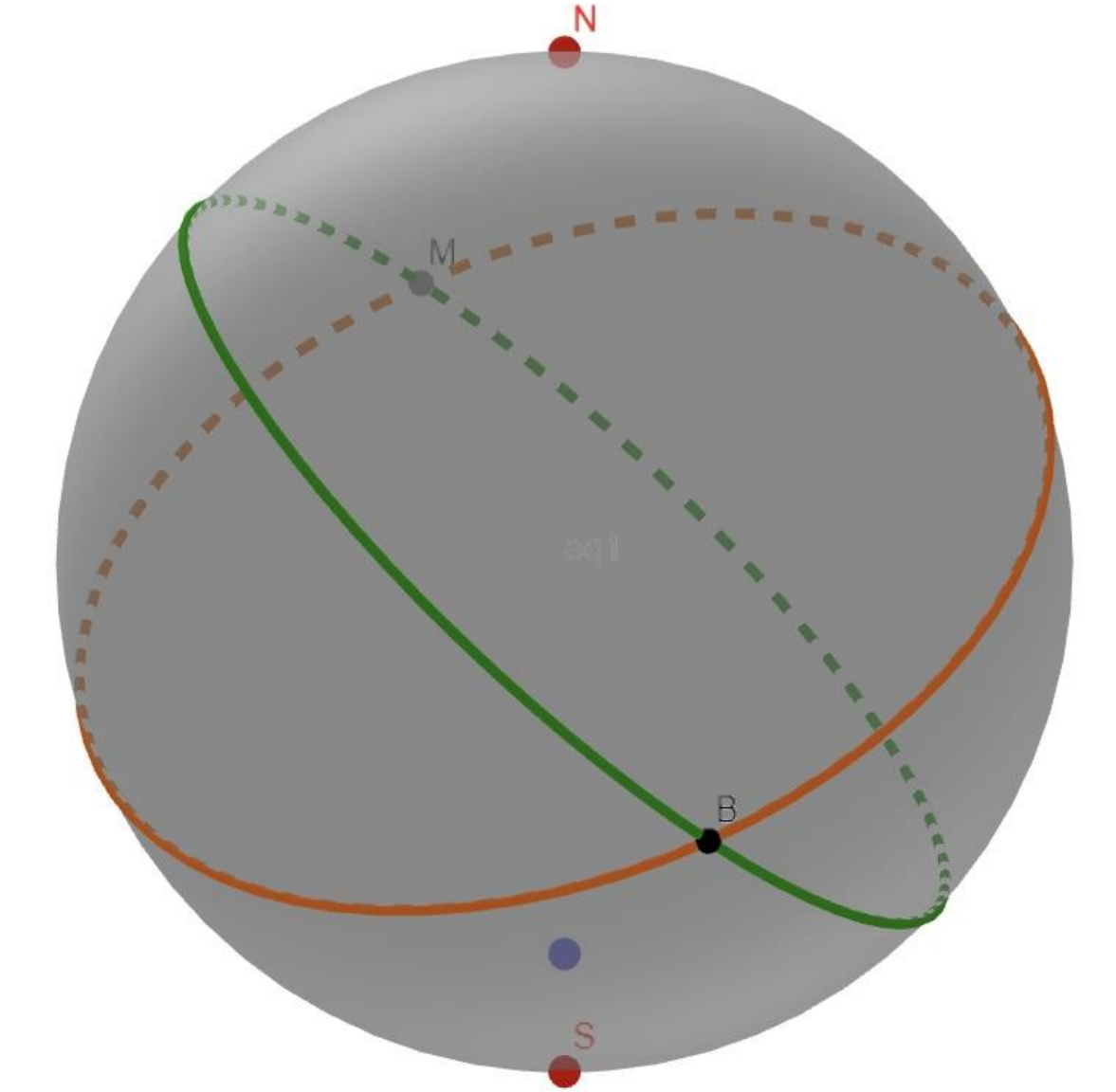
**2<sup>e</sup> postulat**  
Chaque arc de grand cercle peut être prolongé indéfiniment aux deux extrema.



**3<sup>e</sup> postulat**  
Un cercle peut être dessiné avec n'importe quel centre et n'importe quel rayon.



**4<sup>e</sup> postulat**  
Tous les angles droits sont égaux entre eux.



**5<sup>e</sup> postulat**  
Tout couple de grands cercles distincts s'intersectent en deux points antipodaux.

### Quelques propriétés de la géométrie sphérique

#### THÉORÈME (Formule de Girard)

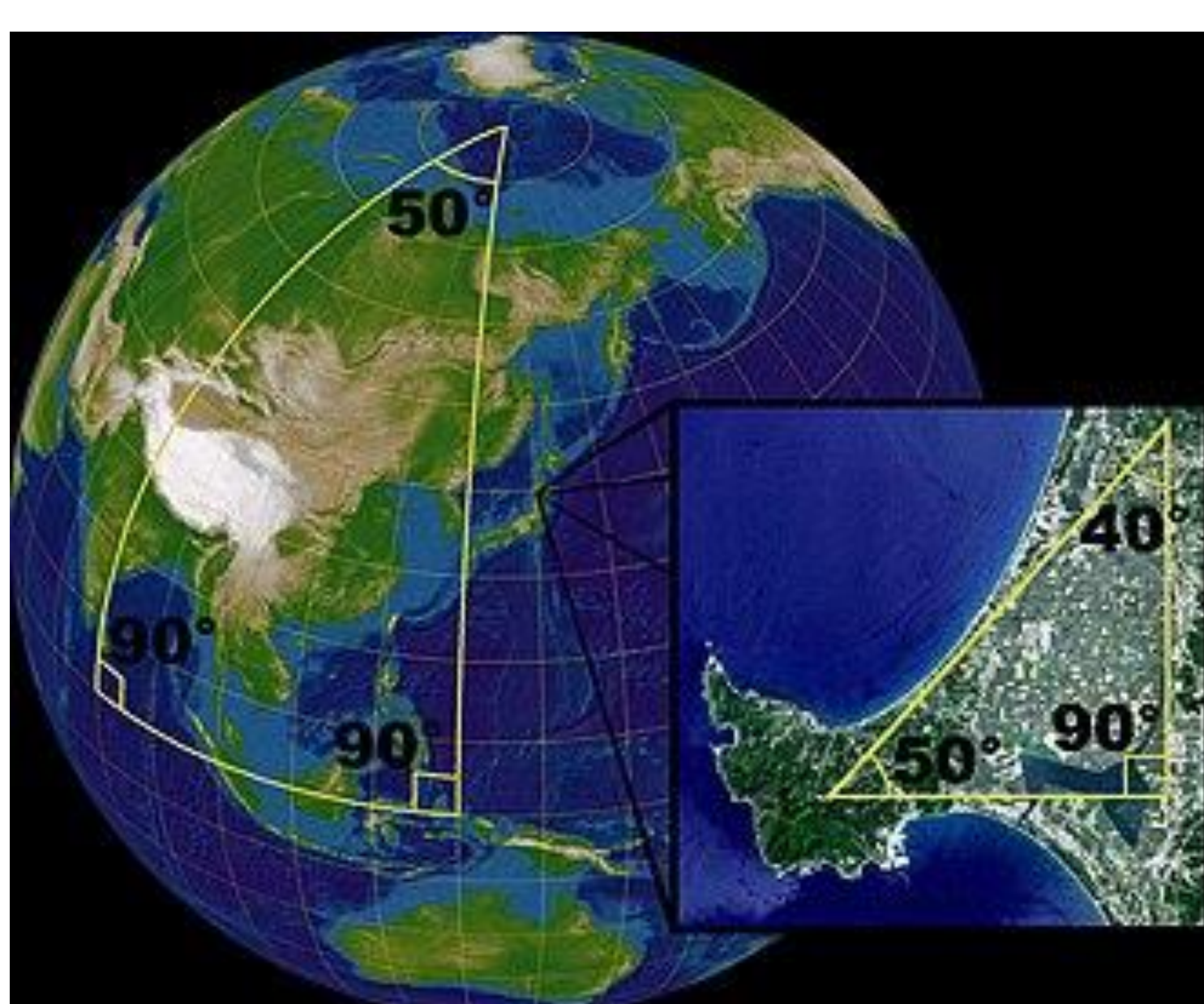
Soit ABC un triangle tracé sur la sphère unité S.  
Soient Aire( $\Delta$ ) son aire et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ses angles, mesurés en radians.  
Alors on a la formule suivante:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Aire}(\Delta) \Leftrightarrow \text{Aire}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

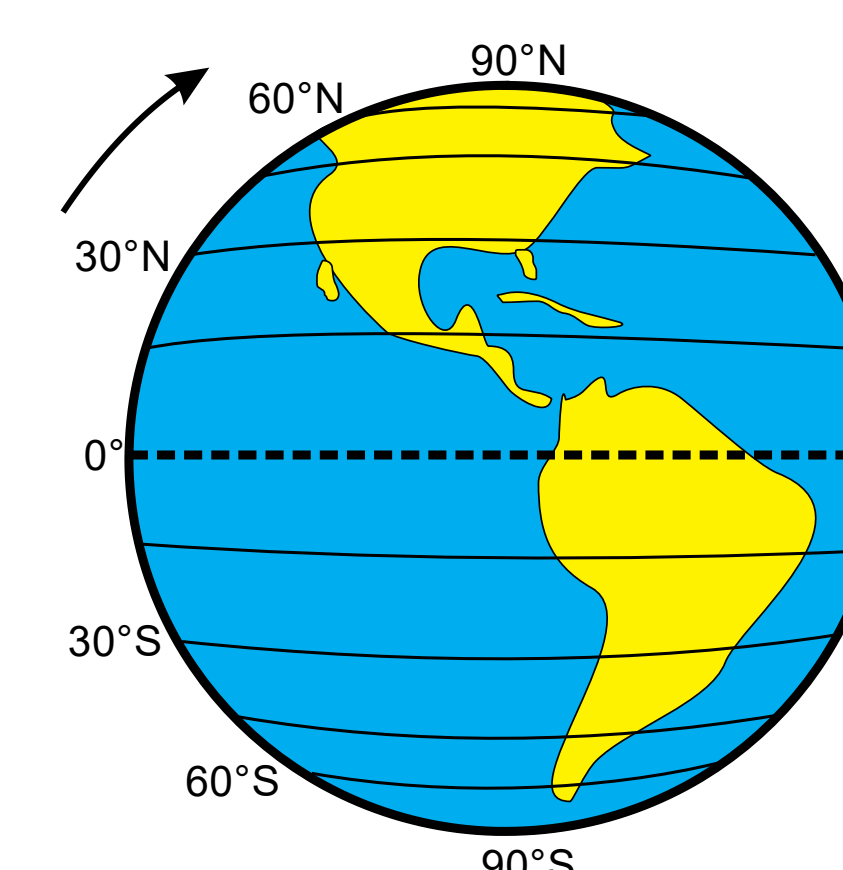
-> Il en découle que la somme des angles d'un triangle hyperbolique est toujours strictement supérieure à  $180^\circ$

- Un arc de cercle est la distance la plus courte entre deux points.
- Deux arcs de cercles s'intersectent toujours en deux points antipodaux.
- Les méridiens sont des grands cercles, MAIS l'équateur est le seul grand cercle en tant que latitude.

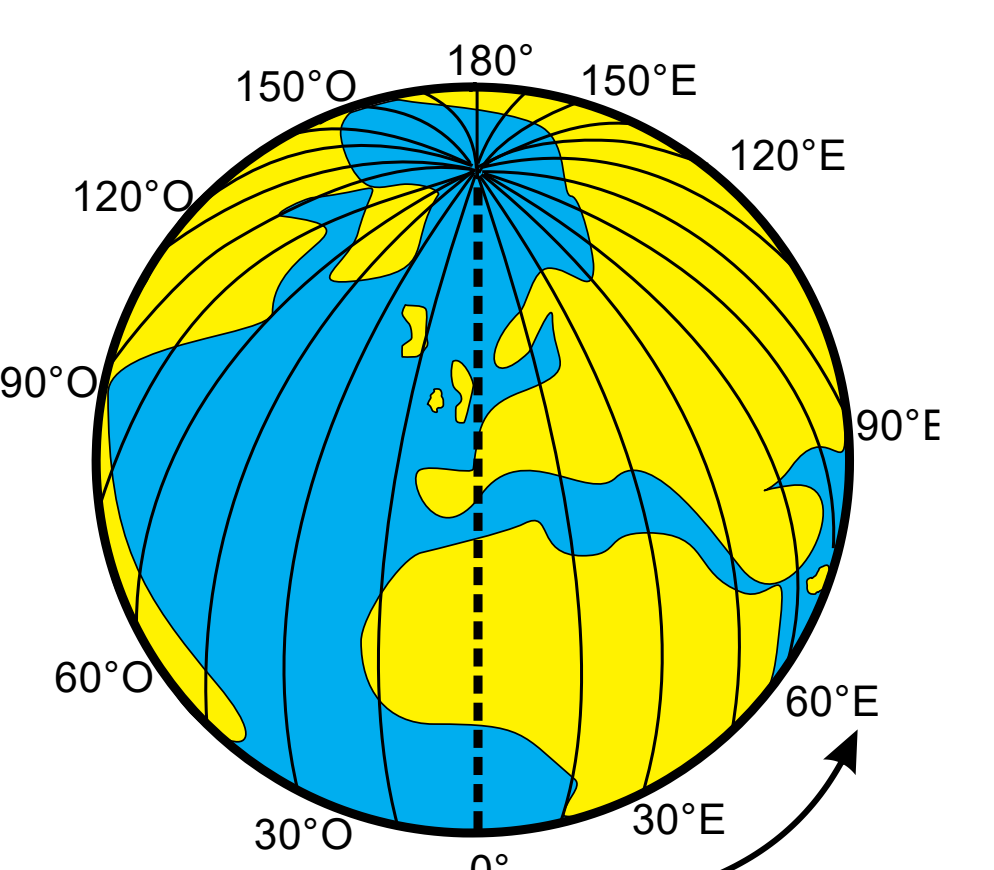
### Utilisations/Applications de la géométrie sphérique



Trajet aérien le plus court



Système de coordonnées latitude longitude





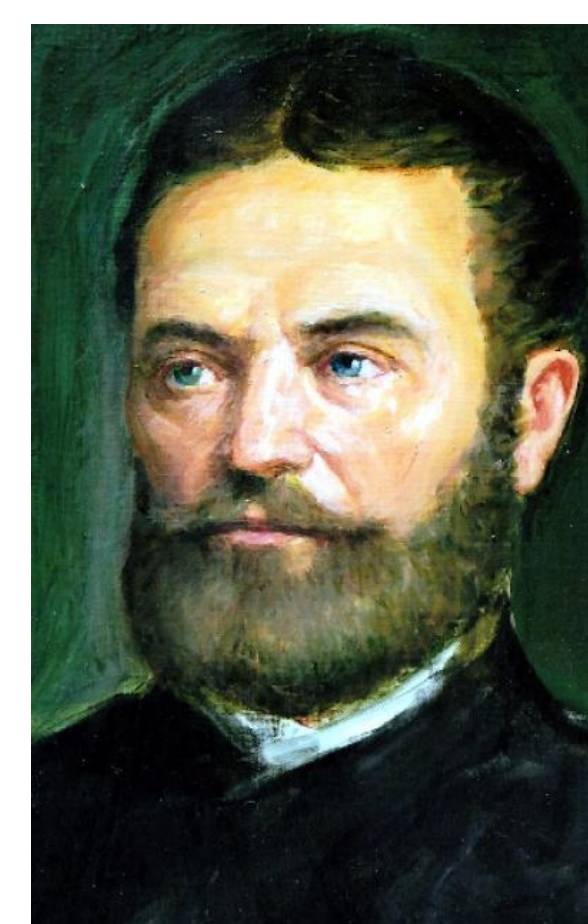


*Handwritten signature*

## Géométrie hyperbolique

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

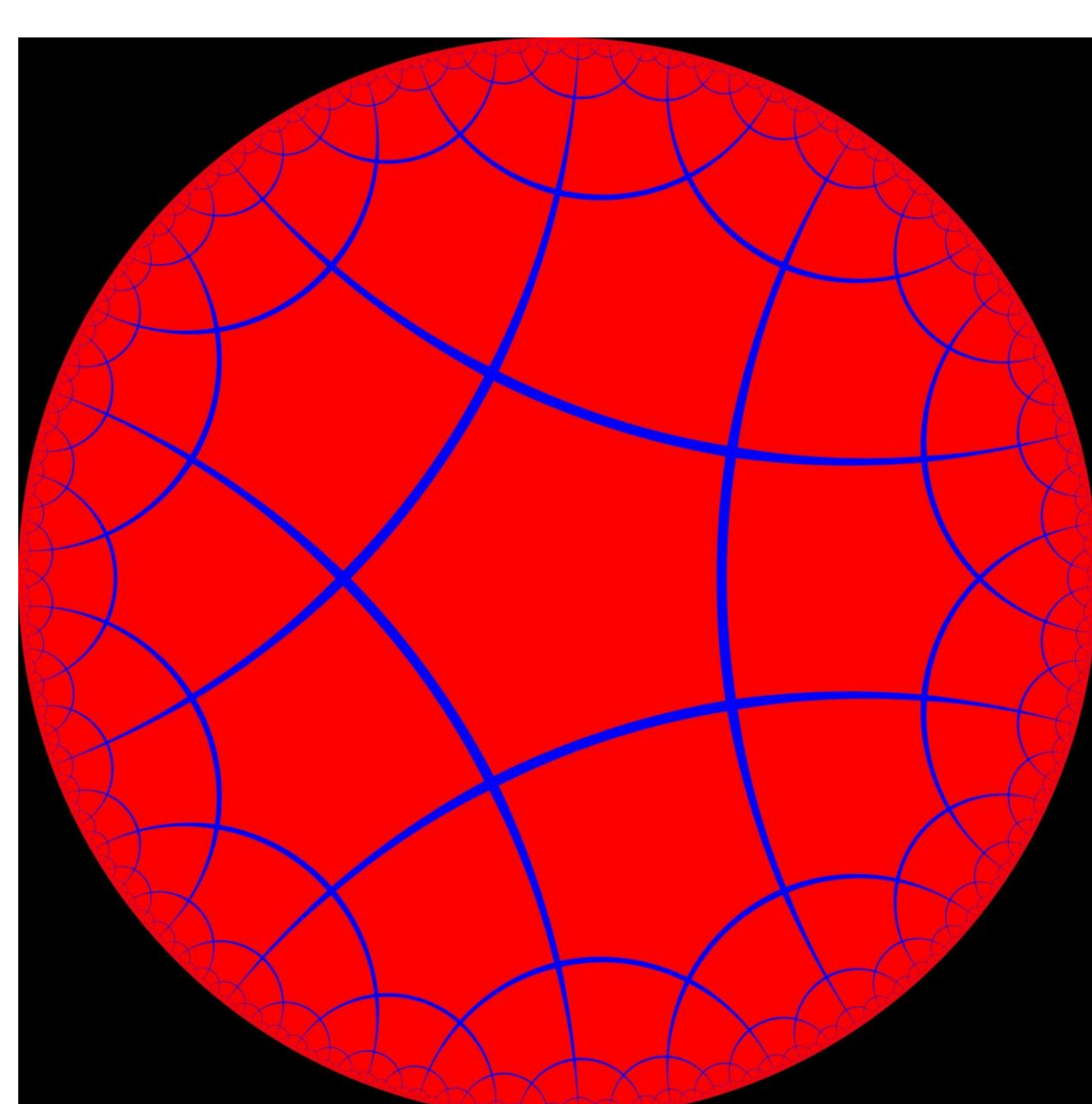
*Camelia ZGHEREA, Daniel AZEVEDO MOREIRA SILVEIRA CABECA, Ilias ZAHAFI, Lenny RANSY, Mohamad CHANAA, Ruben DE PAIVA MOTA, Samantha TRAN, Sinclair TSANA FOBING*



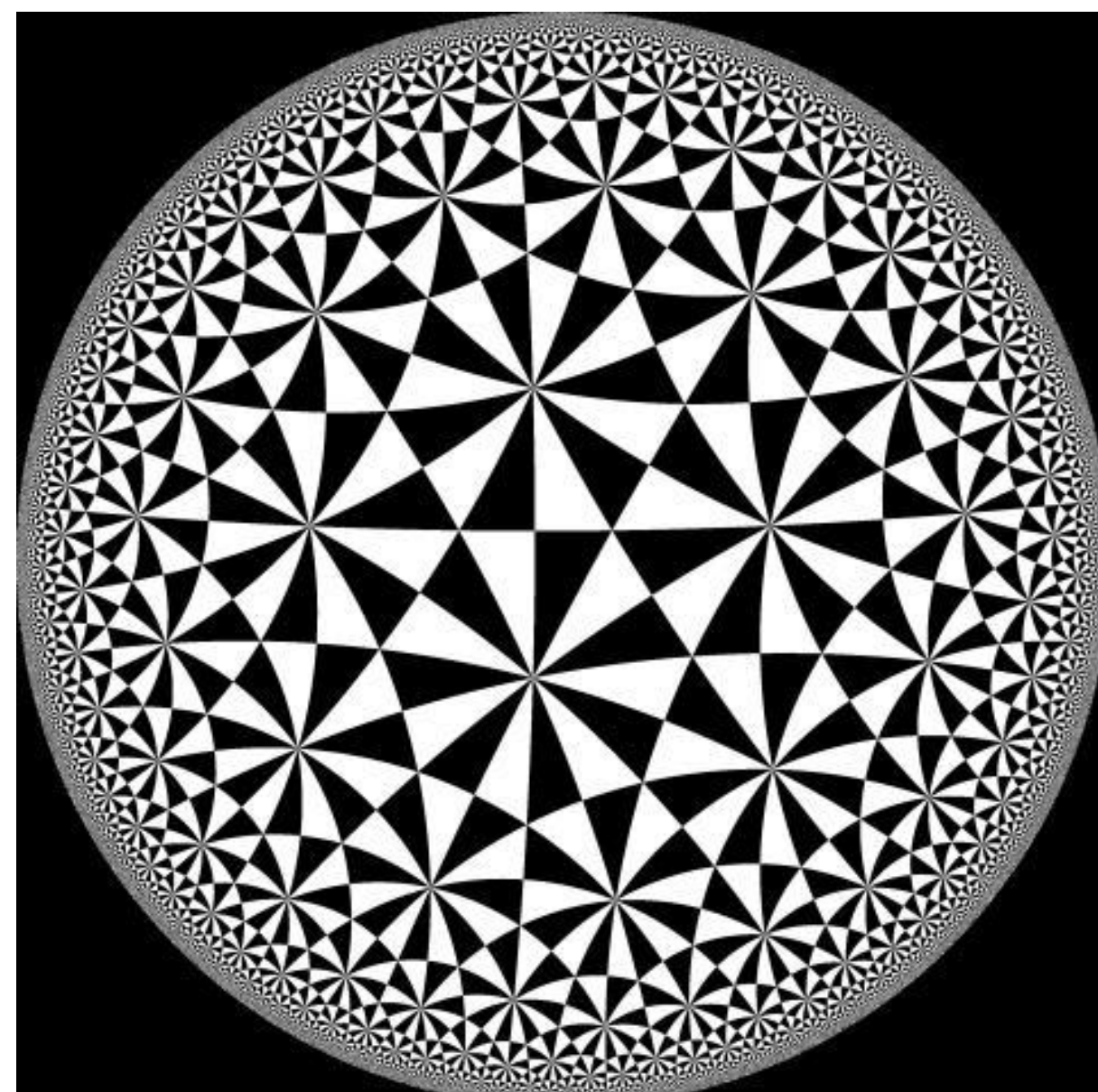
On suppose le 5<sup>ème</sup> postulat faux, on le remplace par:

Par un point extérieur à une droite passe une infinité de droites parallèles

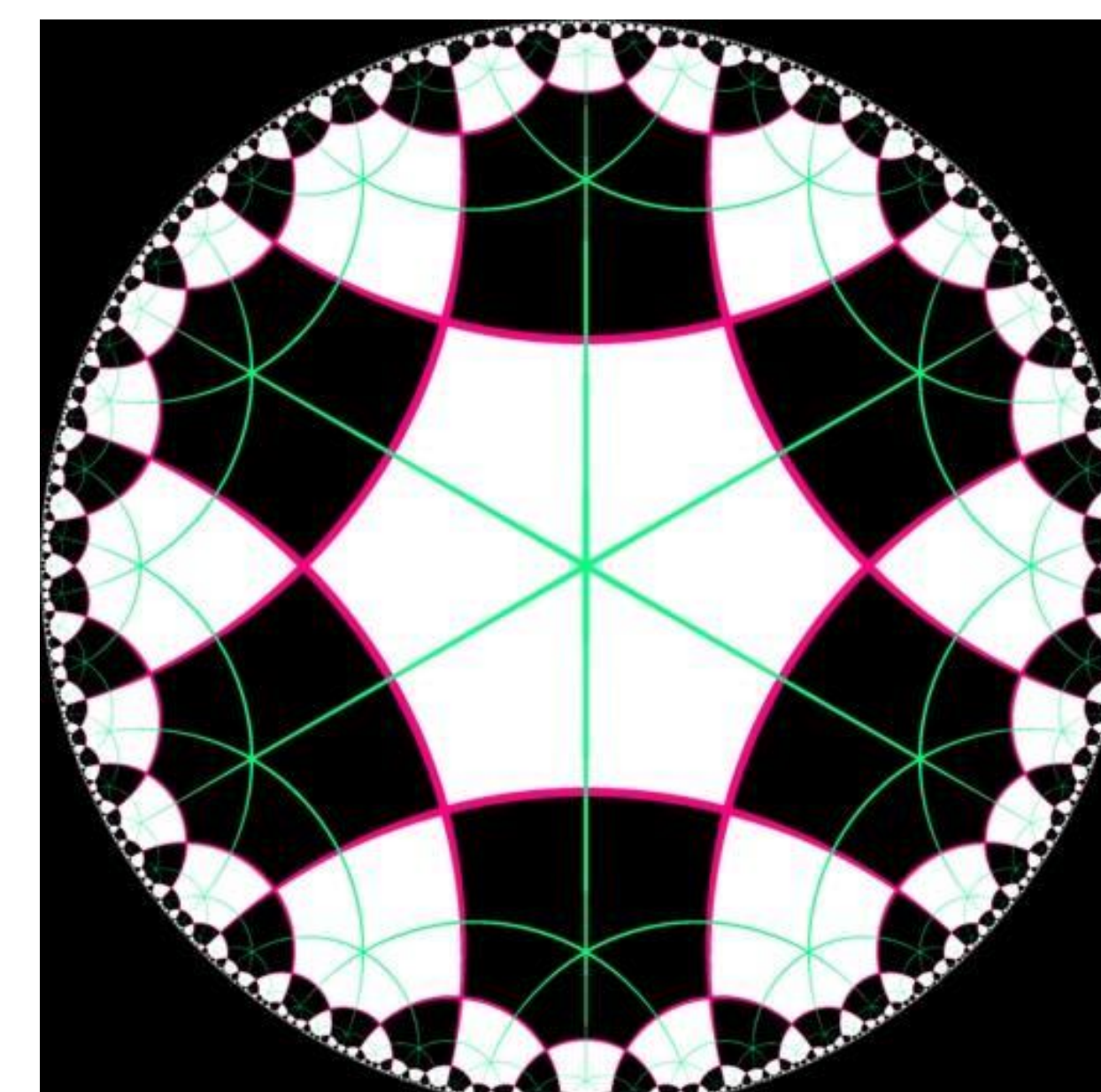
### Modèle du disque de Poincaré



*Pavage du plan hyperbolique avec des pentagones rectangles*

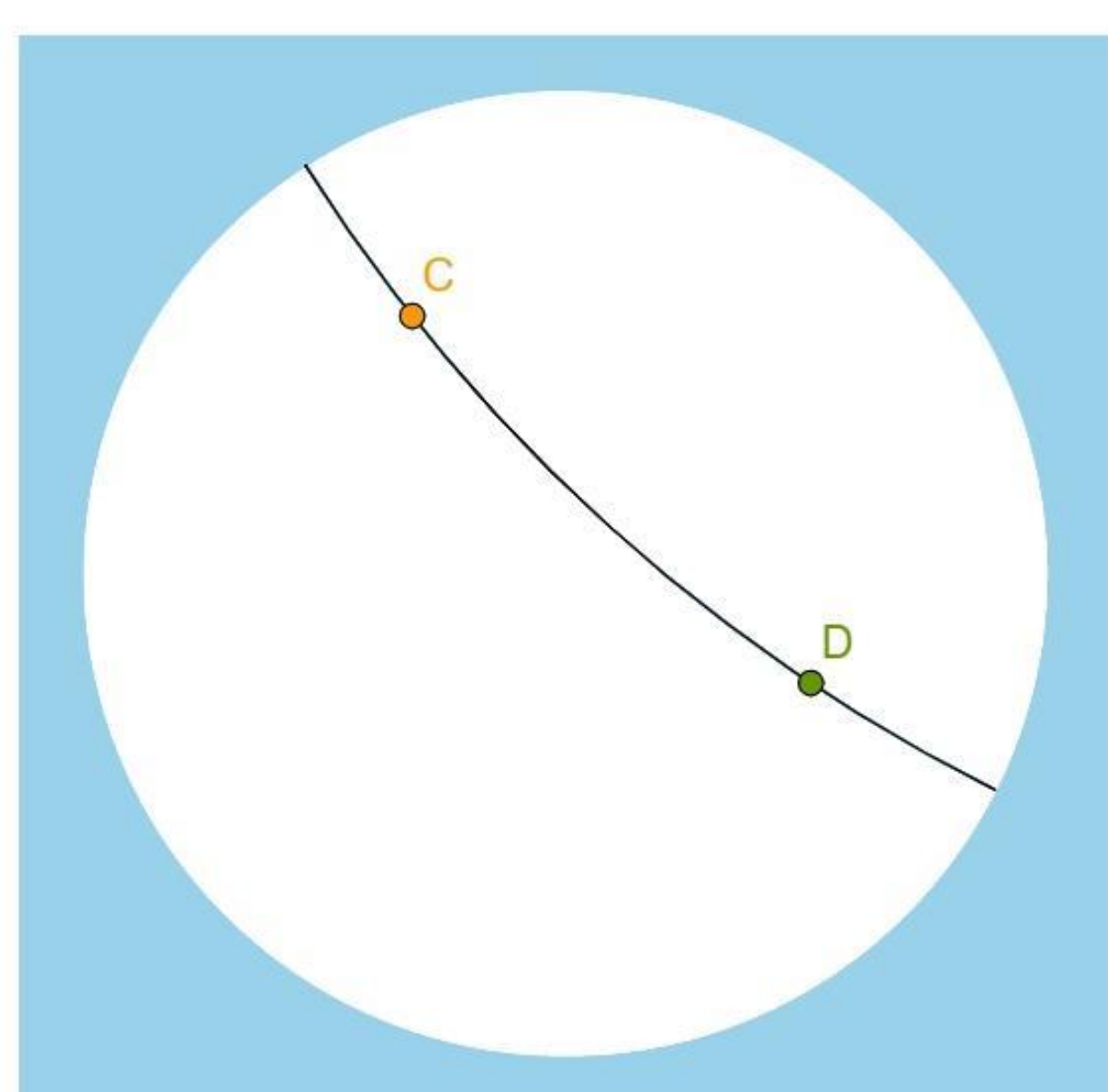


*Pavage du plan hyperbolique avec des triangles*

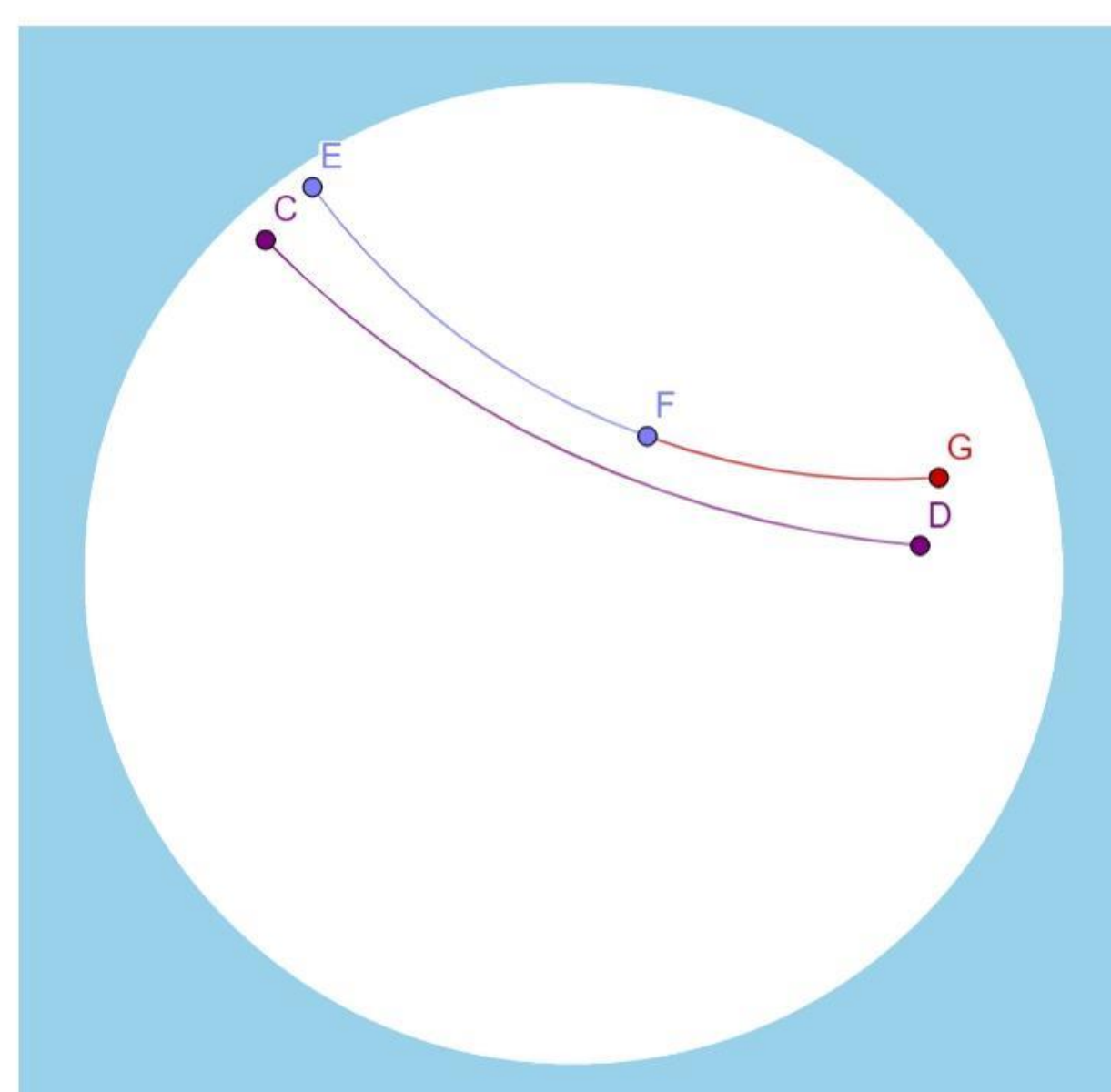


*Pavage du plan hyperbolique avec des hexagones*

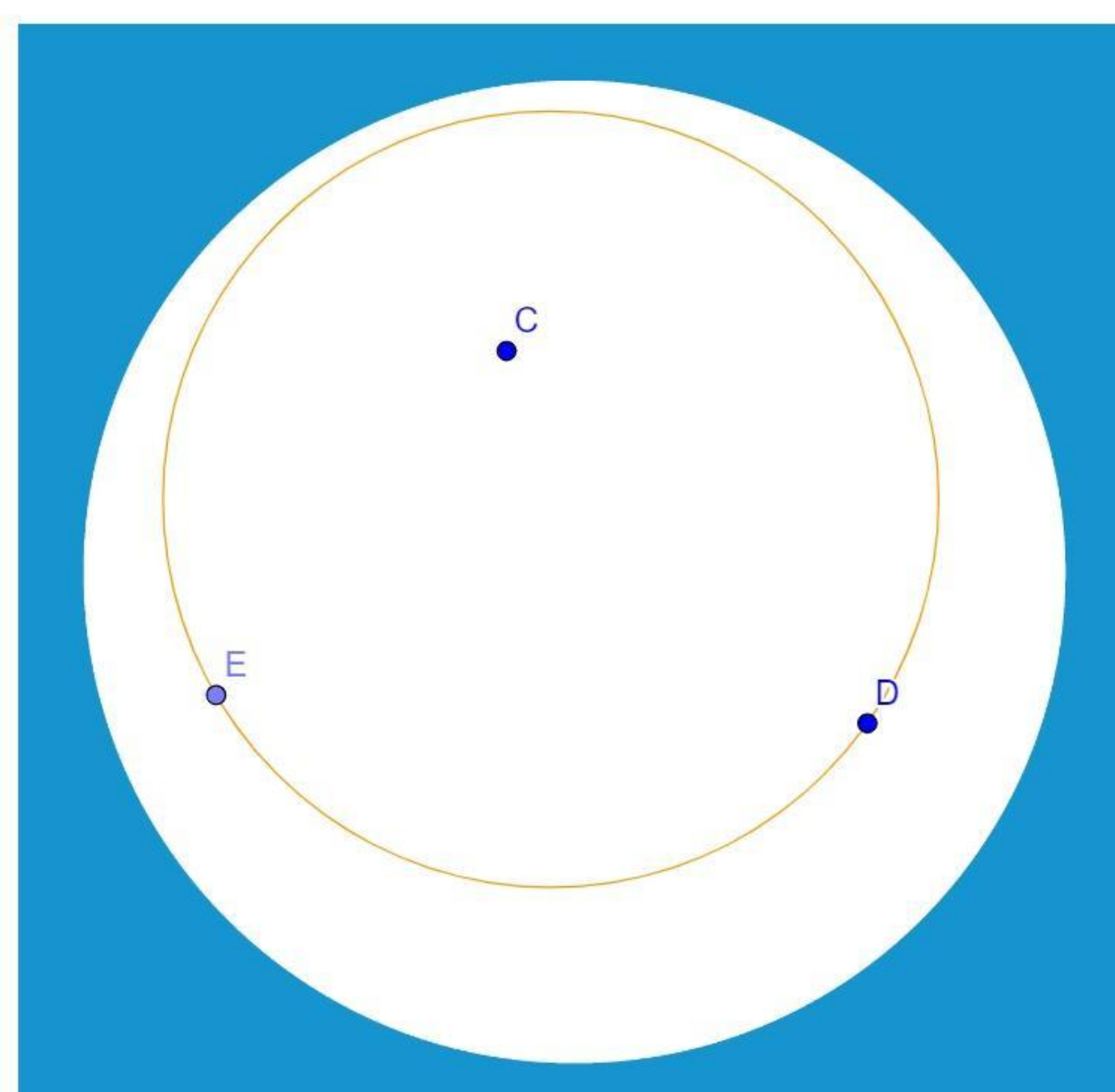
### Les cinq postulats d'Euclide en géométrie hyperbolique



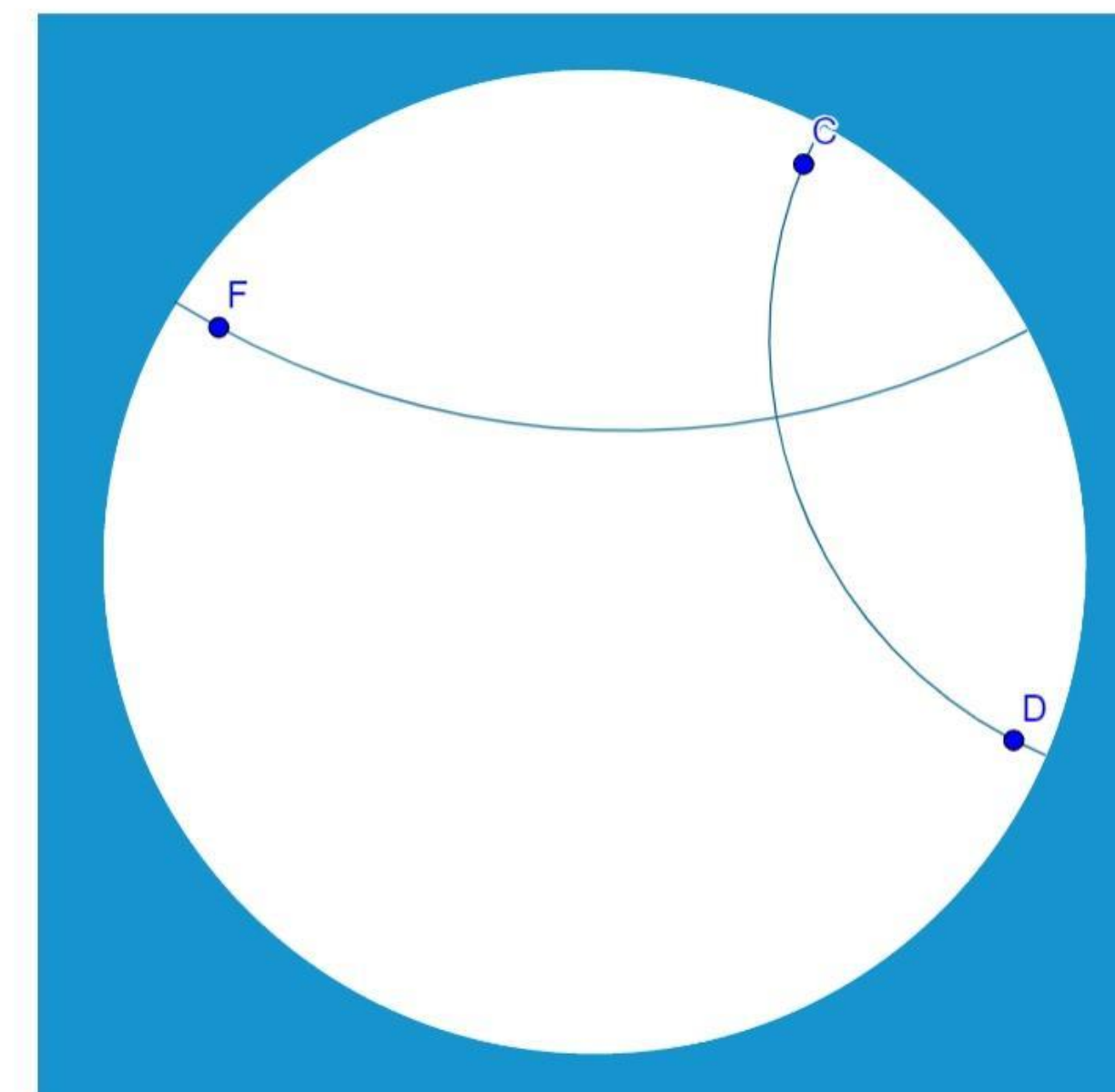
*Le 1<sup>er</sup> postulat d'Euclide est respecté*



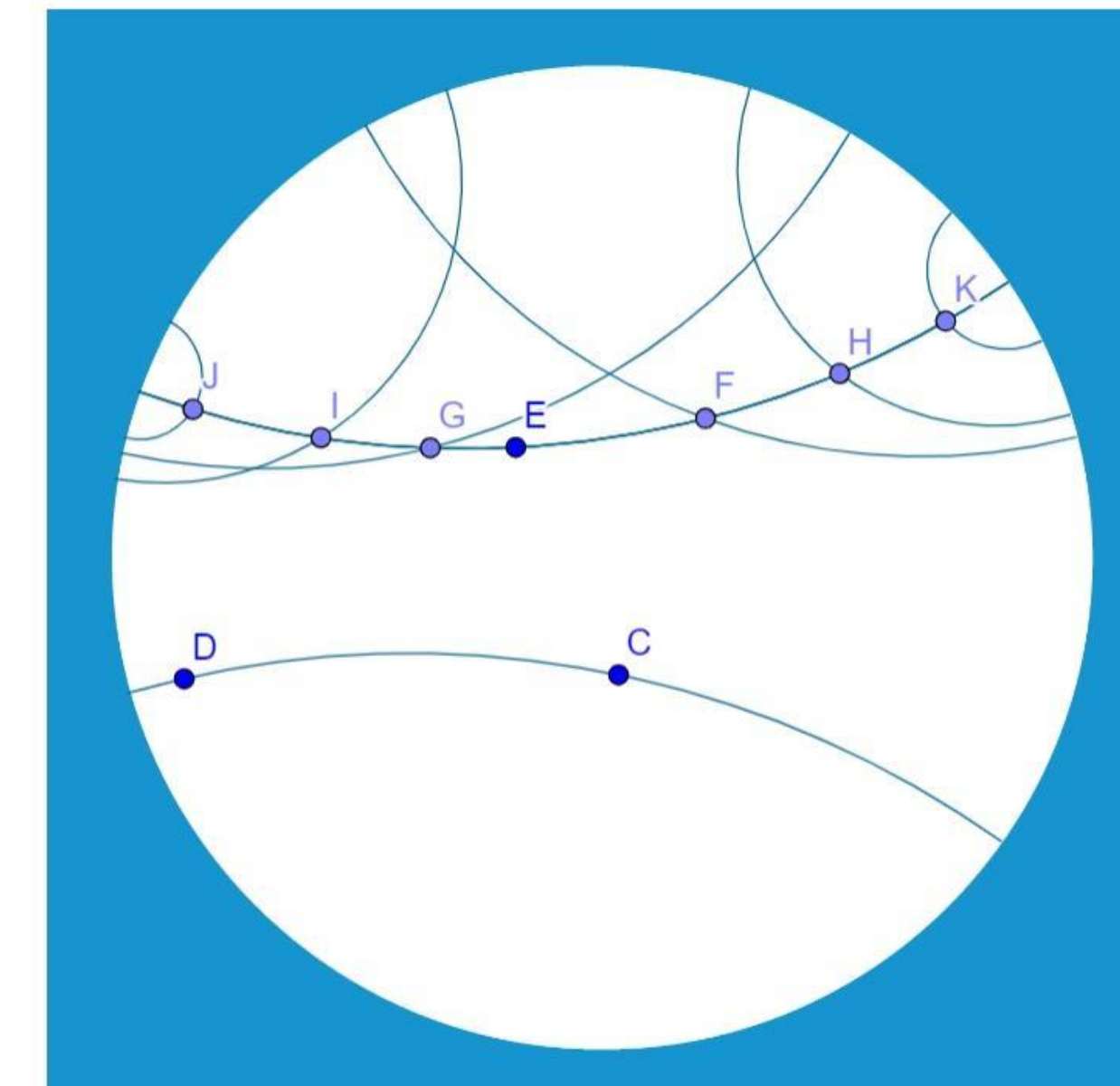
*Le 2<sup>e</sup> postulat d'Euclide est respecté*



*Le 3<sup>e</sup> postulat d'Euclide est respecté*



*Le 4<sup>e</sup> postulat d'Euclide est respecté*



*Le 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide n'est pas respecté*

### Quelques propriétés du plan hyperbolique

- Pour tout triangle  $T$  d'angles  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on a la formule d'aire suivante:

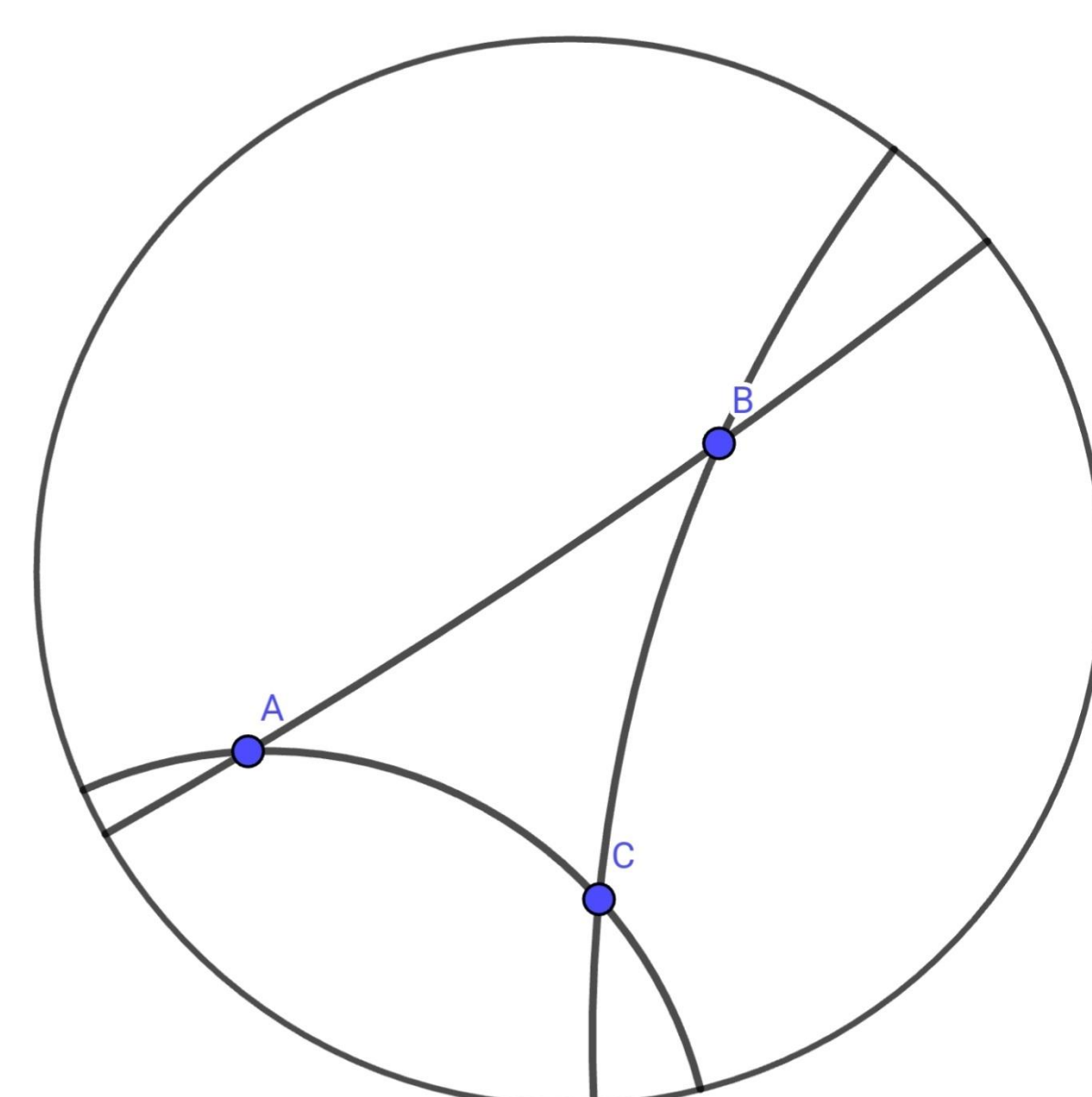
$$\text{Aire}(T) = \pi - a - b - c.$$

- Il en découle que la somme des angles d'un triangle hyperbolique est toujours strictement inférieure à  $180^\circ$

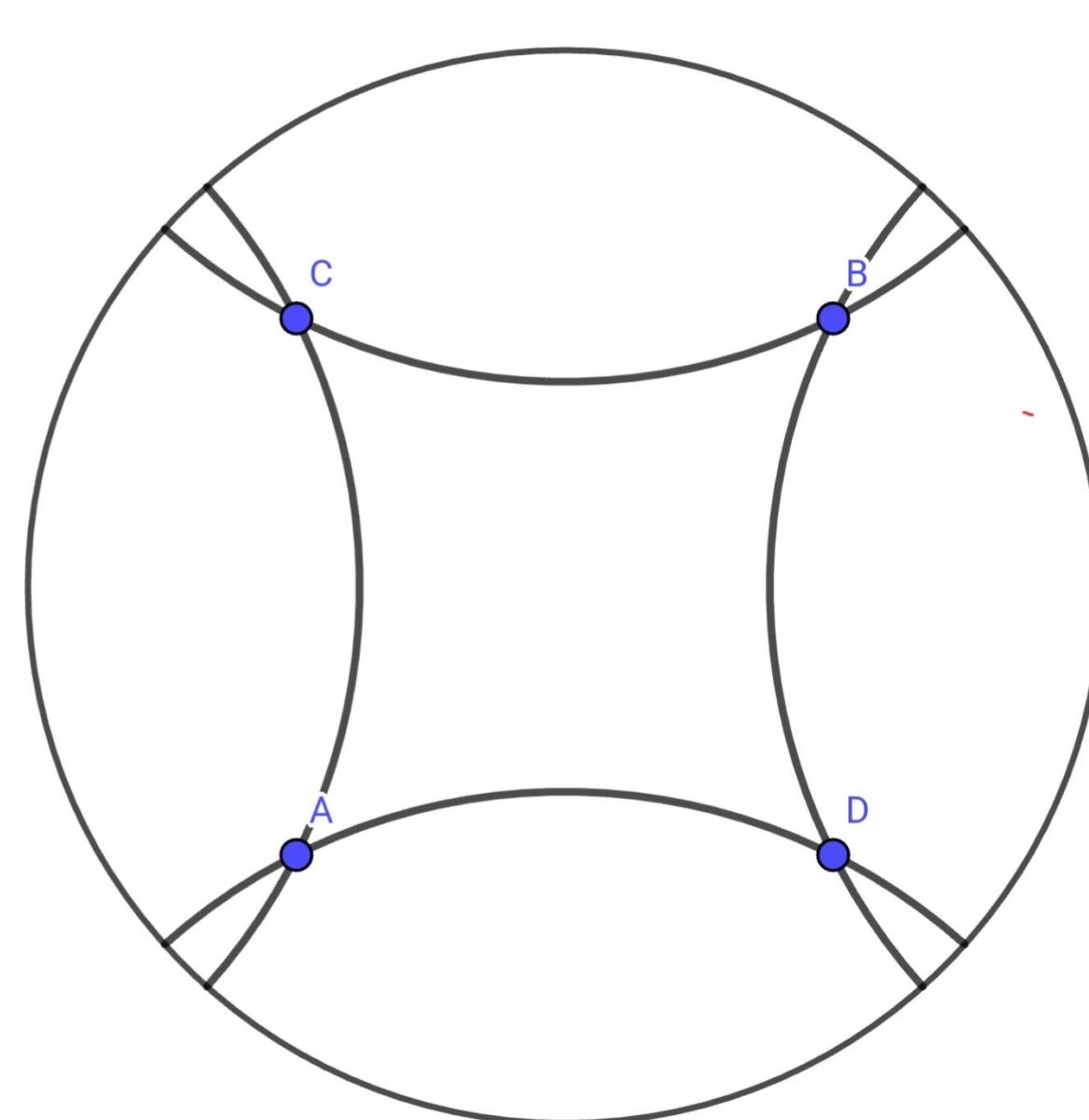
- Il est possible de construire un pentagone rectangle

- Il est impossible de construire un carré

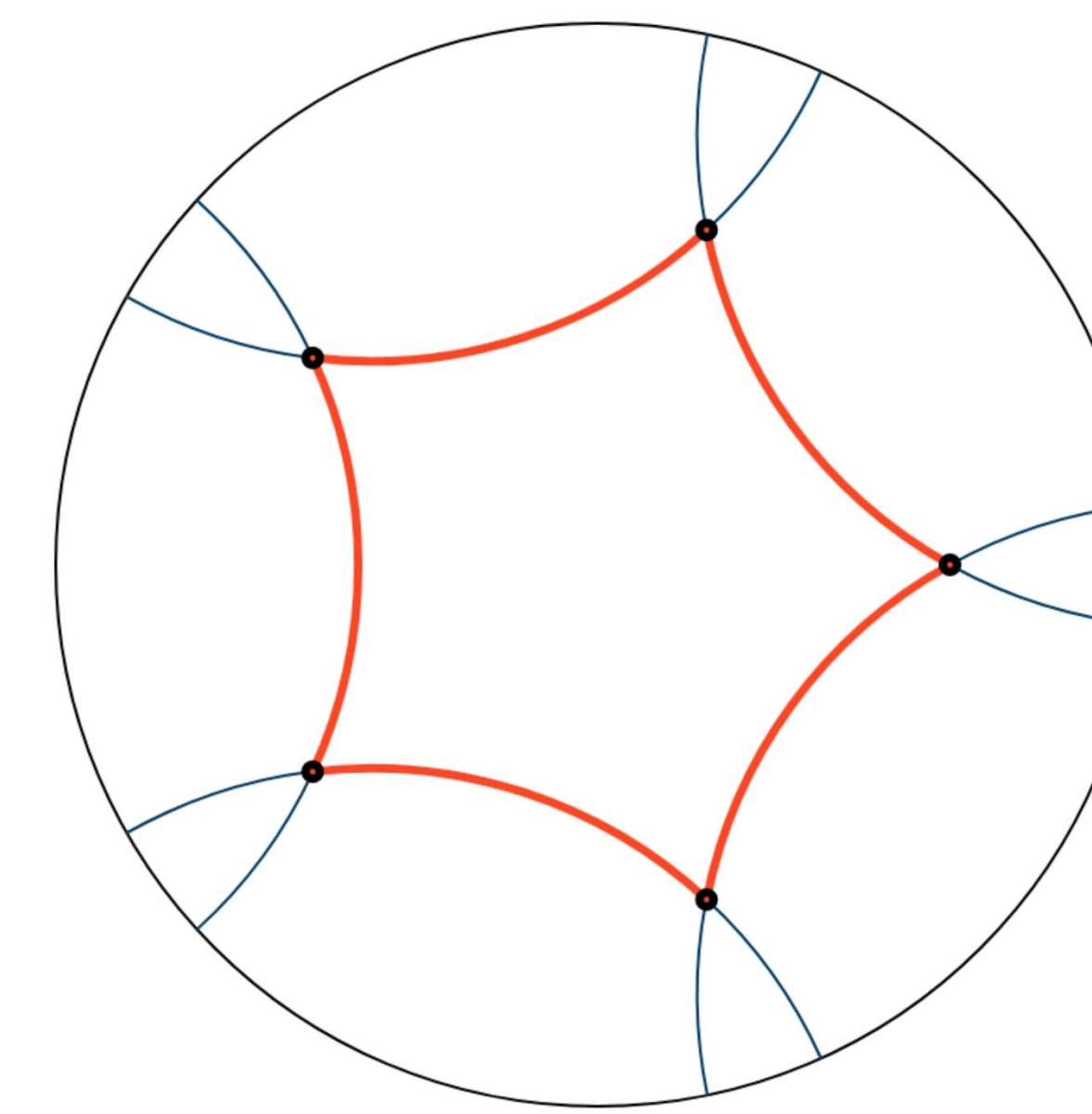
### Les polygones du plan hyperbolique



*Triangle quelconque*



*Quadrilatère régulier*



*Pentagone régulier*