Message #général
1.On peut découper chaque polygone en triangles. Ensuite, chaque triangle est transformé en rectangle, puis en carré. Les carrés ainsi obtenus peuvent êtres « fusionnés » deux-à-deux par un autre découpage, afin d'obtenir finalement un seul carré d'aire égale au polygone d'origine. Ce processus étant inversible, on obtient un découpage d'un polygone en n'importe quel autre de même aire.

PRINTEMPS DES SCIENCES 18-24 Mars 2024

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

# Découpages Géométriques

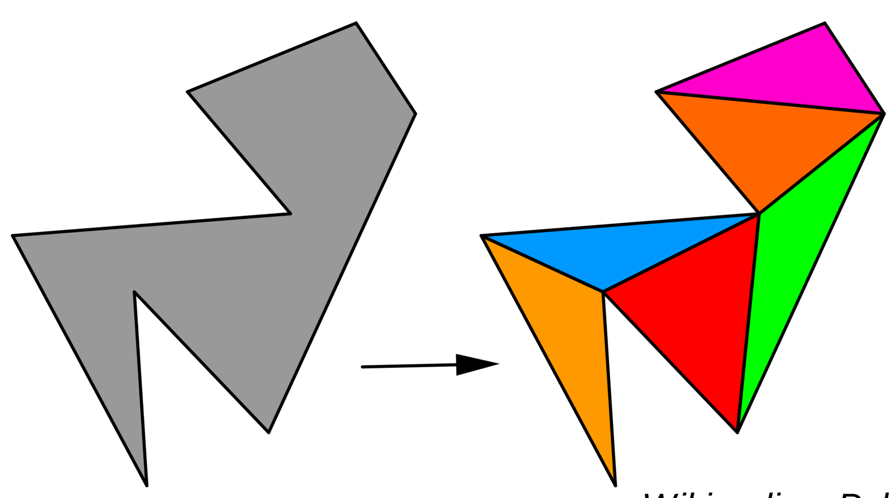
UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

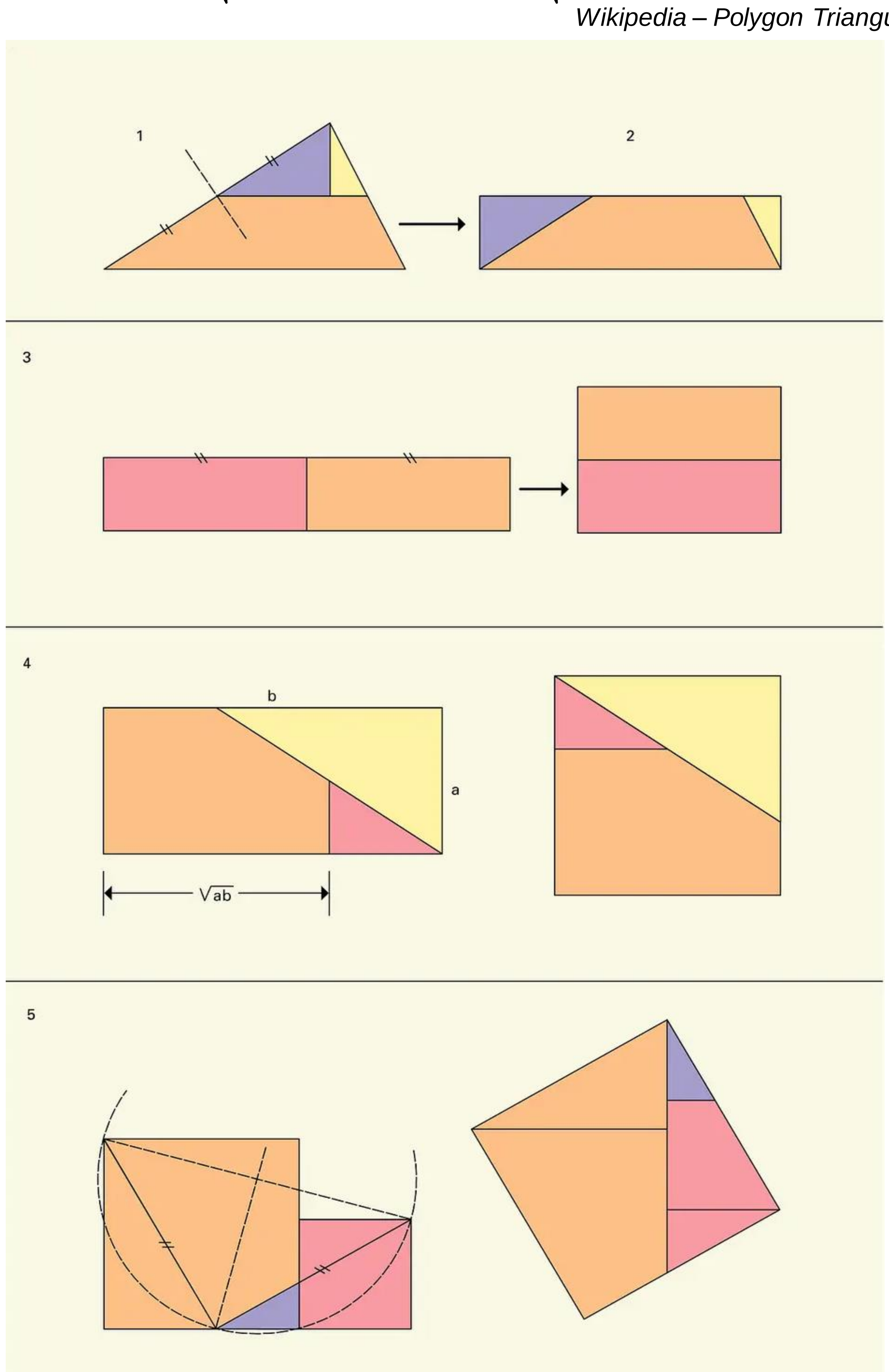
*BAJRAKTARI Eron, DUMELIE Flavian, GUISSET Ernest, JAKAJ Jak, KATICHA Georges, NDEM André, YAZDANPARAST Seyed*

## Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien

Lorsque deux polygones ont la même aire, on peut découper le premier en un nombre fini de polygones et les réarranger pour former le second polygone.



*Wikipedia – Polygon Triangulation*




*Encyclopædia Universalis France*

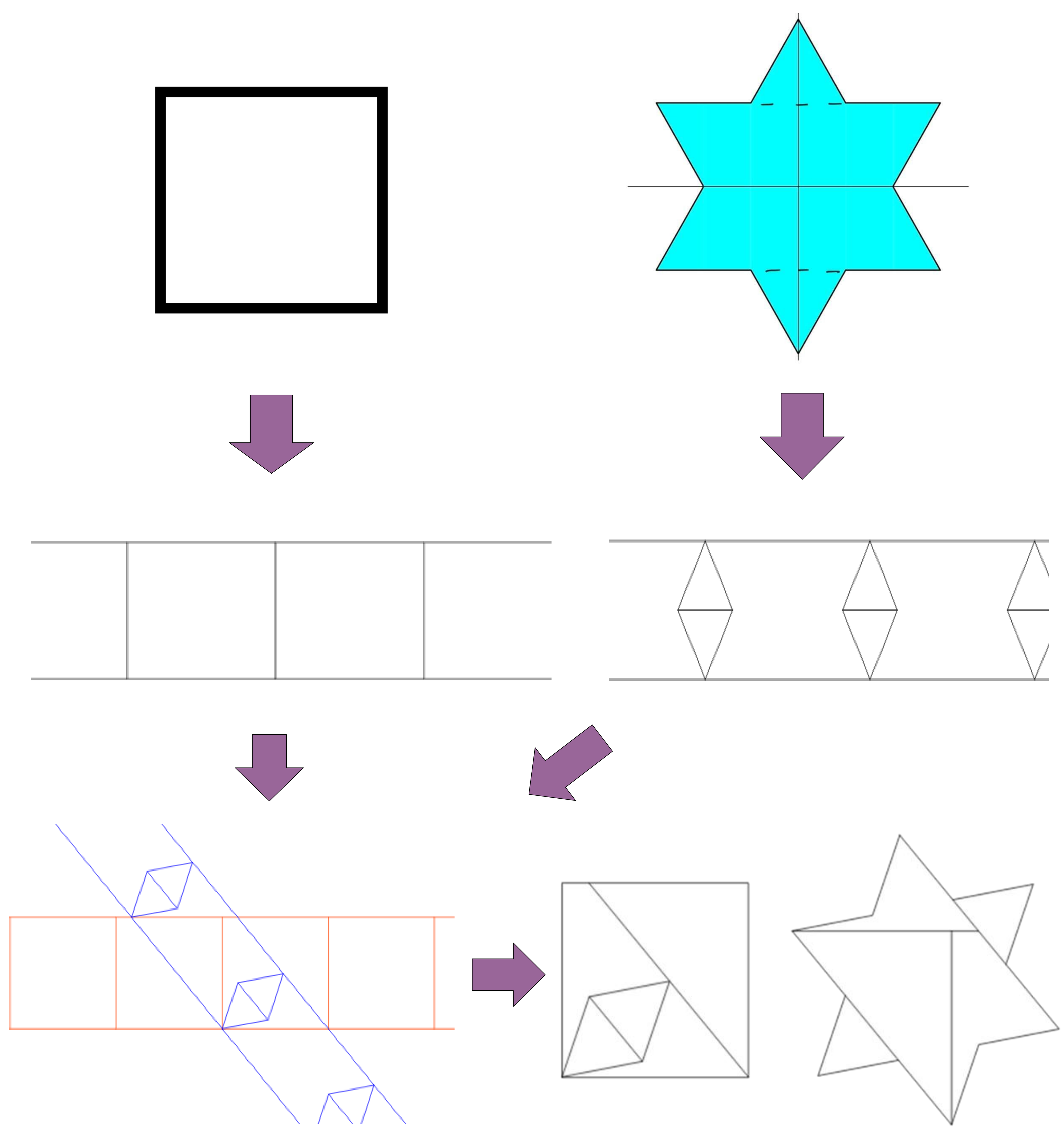
Pour effectuer cette opération, chaque polygone est découpé en carrés de surface identique : le polygone est subdivisé en triangles. Ensuite, chaque triangle est transformé en rectangle, puis en carré. Les carrés ainsi obtenus peuvent êtres « fusionnés » deux-à-deux par un autre découpage. En suivant ce processus dans l'ordre inverse, on obtient un découpage d'un polygone en n'importe quel autre de même aire.

## Méthode de Theobald

Pour réduire le nombre de pièces d'une dissection, une méthode consiste à découper chaque polygone afin de former une section de bande. En mettant ces sections bout à bout, on obtient une P-bande.

Après avoir créé deux P-bandes, on les superpose de façon que l'aire de l'intersection est égale à l'aire des deux polygones. Le parallélogramme formé par les bords des deux bandes superposées définit les pièces d'une dissection (d'où « P-bande »). Ensuite, tout en maintenant l'angle constant, on coulisse une bande sur l'autre jusqu'à trouver l'intersection avec le moins de pièces.

Notez que la largeur de chaque bande doit être inférieure à la longueur de l'élément de bande formé par l'autre polygone, sinon la zone de chevauchement sera toujours trop grande, quel que soit l'angle entre les bandes.



*Geometric Dissections – Gavin Theobald*

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

# Découpages Géométriques

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

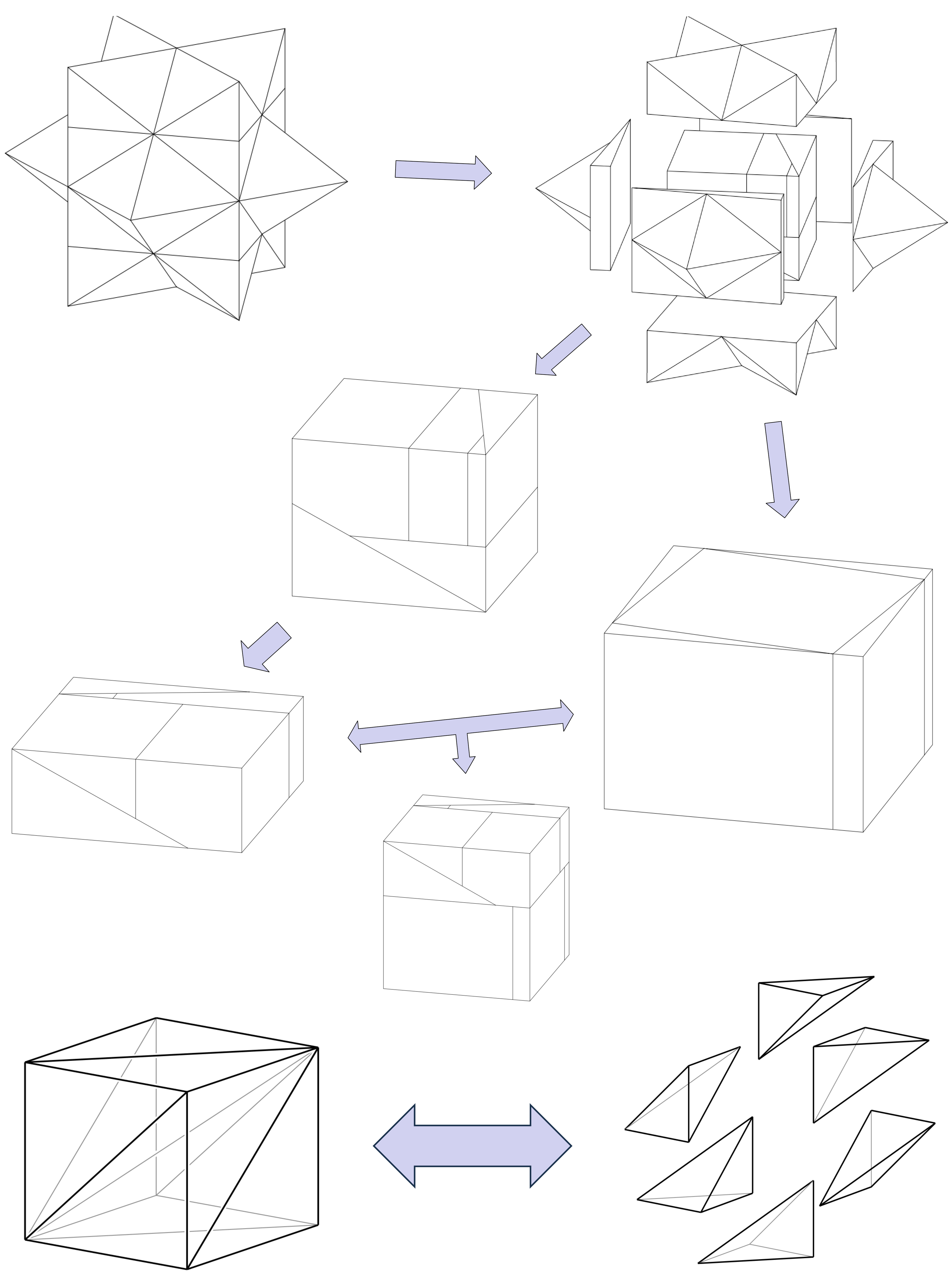
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

*BAJRAKTARI Eron, DUMELIE Flavian, GUISSET Ernest, JAKAJ Jak, KATICHA Georges, NDEM André, YAZDANPARAST Seyed*

## Découpages en trois dimensions

En 1902, les 23 problèmes de David Hilbert qui joueront un rôle majeur dans les mathématiques du 20ème siècle sont publiés. Le troisième parmi ceux-ci est la suivante:
*Étant donné deux polyèdres de même volume, est-il possible de découper l'un en un nombre fini de polyèdres et de les réassembler pour former le second?*

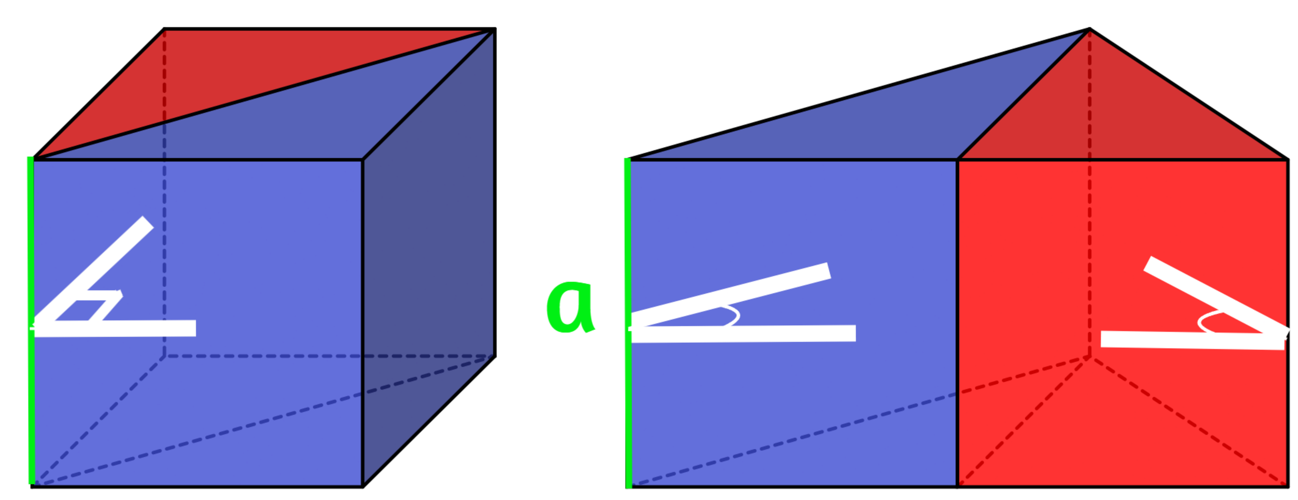
Par polyèdre on entend tout ensemble fermé de l'espace réel tri-dimensionnel, délimité par un nombre fini de face planes en position générale.



gavin-theobald.uk

## Invariant de Dehn

Max Dehn a résolu le troisième problème de Hilbert l'année même où le problème a été posé. Dehn a montré qu'il n'est pas toujours possible de découper un polyèdre en un autre de même volume.
Pour que ce soit possible, il faut en plus que ces deux polyèdres aient le même *invariant de Dehn.*




Wikipedia - 3ème Problème de Hilbert

L'invariant de Dehn est une qualité intrinsèque à un polyèdre qui, comme son nom l'indique, est invariante par rapport à l'action de découpage. Il est défini comme suit avec *P* le polyèdre, et *a* ses arêtes, où *l(a)* désigne la longueur de l'arête *a* et *θ(a)* l'angle dièdre formé par les faces reliées par l'arête.

$$\mathcal{D}(P) = \sum_{a} l(a) \otimes (\theta(a) + \mathbb{Z}\pi)$$

Ainsi, si l'on veut savoir si oui ou non un polyèdre peut être découpé en un autre, il suffit de vérifier si leur invariant de Dehn et leur volume sont identiques ou non.
Notons que l'invariant de Dehn n'est pas un nombre. Il provient d'un objet algébrique plus complexe appelé produit tensoriel.

L'intérêt du produit tensoriel dans ce cas résulte notamment de la propriété suivante:

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$$

En effet, une découpe divise soit la longueur de l'arête, soit l'angle dièdre. Dans les deux cas, l'invariant de Dehn sera conservé.

PRINTEMPS DES SCIENCES 18-24 Mars 2024

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

# Découpages Géométriques

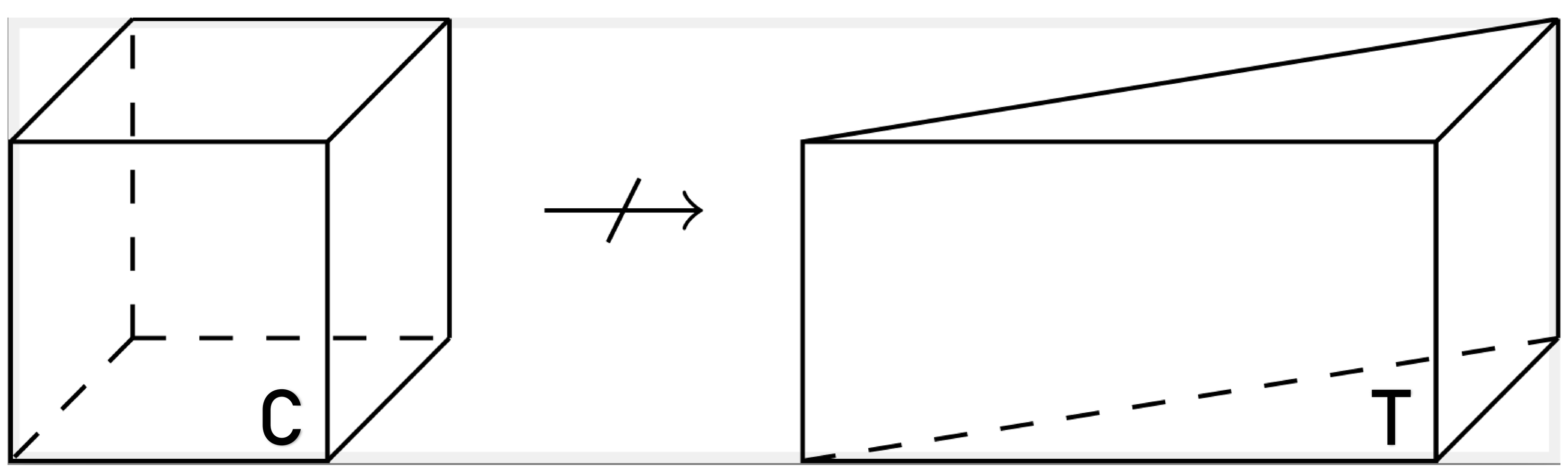

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

*BAJRAKTARI Eron, DUMELIE Flavian, GUISSET Ernest, JAKAJ Jak, KATICHA Georges, NDEM André, YAZDANPARAST Seyed*


## Calcul de l'invariant de Dehn

Ci-suit le calcul de l'invariant de Dehn pour un cube et un tétraèdre de même volume. On montre que leurs invariants de Dehn ne sont pas égaux. Ainsi, il n'existe aucun découpage du cube vers le tétraèdre.




$$\begin{aligned}\mathcal{D}(C) &= \sum_{\text{e, arête de C}} l(e) \otimes \theta(e) \\ &= 12 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \otimes 12\frac{\pi}{2} \\ &= 1 \otimes 6\pi \\ &= 1 \otimes 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T) = {} & 2 \cdot \sqrt{5} \otimes \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \otimes \frac{\pi}{2} \\ & + 3 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} \\ & +1 \otimes (\arctan(2) + \arctan(\tfrac{1}{2})) \\ & = 0 + 0 + 0 \\ & +1 \otimes (\arctan(2) + \arctan(\tfrac{1}{2})) \\ & \neq 0\end{aligned}$$

## D’une pierre deux coups

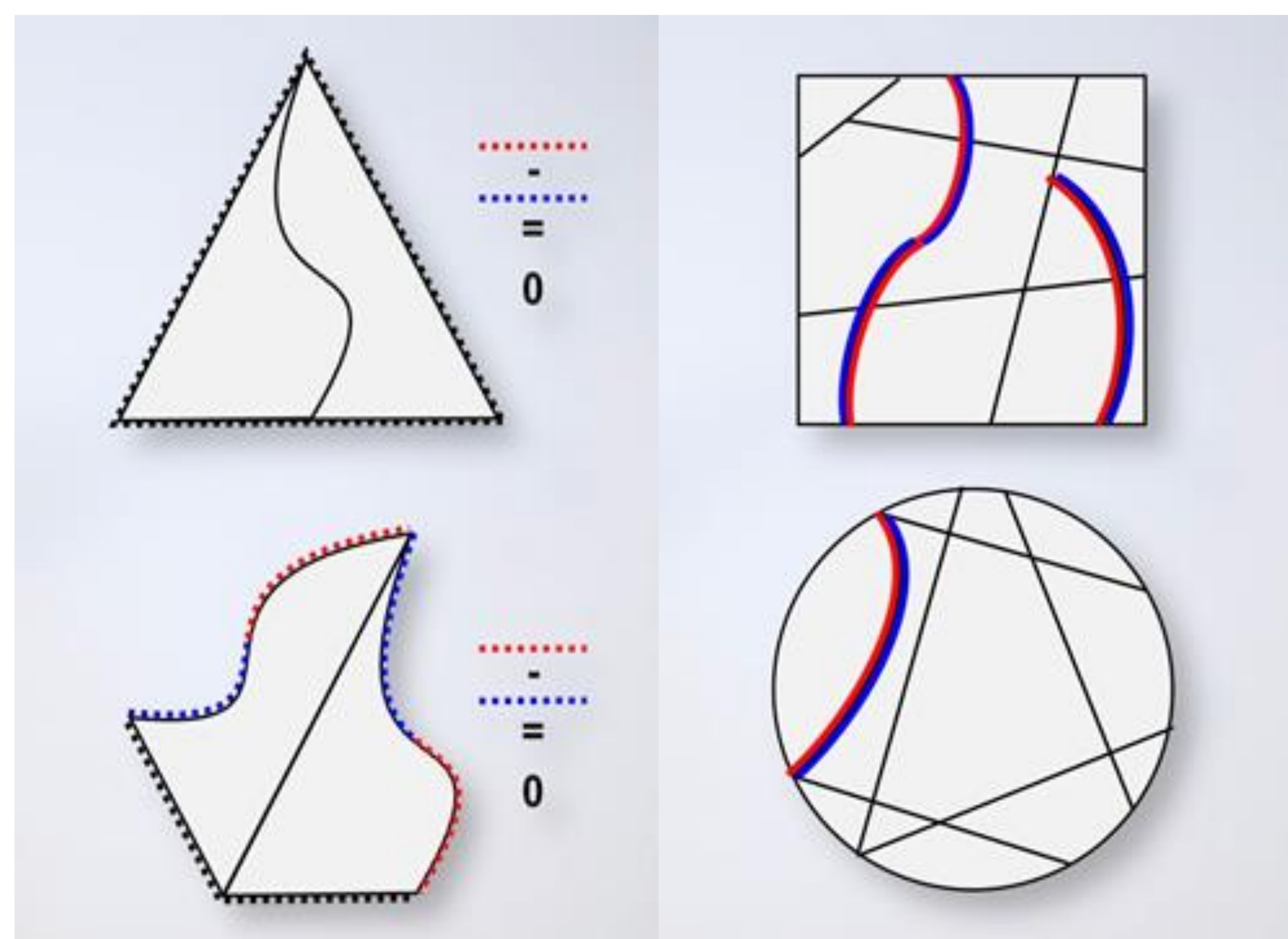
Le "paradoxe" de Banach-Tarski donne une façon de diviser la sphère tridimensionnelle en moins de 10 parties et ensuite les recomposer, sans les déformer, pour former deux boules identiques à la première.
Les parties sont obtenus par des considérations ensemblistes, plutôt que par des découpages.

*Wikipedia – Paradoxe de Banach - Tarski*

Ce résultat étant très contre-intuitif, au point d’être appelé paradoxe, il a causé un grand débat au sein de la communauté mathématique.
La construction des parties utilisées dans cette décomposition nécessite l’axiome du choix qui a par suite été remis en question.

## La quadrature du cercle de Tarski

Est-il possible de découper un disque en un nombre fini de morceaux (pas forcément des polygones) pour reformer un carré ? Il a été démontré que si nos dissections sont obtenues par des coupes (rectiligne ou non), il est impossible de transformer un disque en un carré.
En effet, il existe un invariant de découpe prenant en compte la courbure indiquant que le disque et le carré sont intrinsèquement différents l'un de l'autre. On ne peut ainsi découper l'un en l'autre.




*Passe-science - Equi-decomposition et mesure (YouTube)*

L'invariant est donné par la somme des longueurs délimitant chaque pièce, en comptant les longueurs des parties convexes avec un coefficient +1, les longueurs concaves avec un coefficient -1, et les longueurs rectilignes avec un coefficient 0 (on ne les compte pas).
Comme tout bord concave interne sur une pièce correspond à un bord convexe de même longueur sur une autre pièce, une nouvelle découpe ne change pas cette somme des longueurs.

Étant donné que le périmètre du carré est délimité par des longueurs rectilignes, les longueurs concaves et convexes d’une découpe de carré se compenseront toujours. Ainsi qu’importe le découpage d’un carré son invariant sera nul. Pour un disque, le contour est délimité par une longueur convexe. Le cercle possèdera donc un excès de longueurs convexes et son invariant sera strictement positif.

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES