PRINTEMPS DES SCIENCES 18-24 Mars 2024

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

CHAINES DE MARKOV

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Robin AERTS, Assia BEN HAMOU, Athanasios KANELLAKIS, Lucas LEJEUNE Benjamin NOEZ, Marylène TAVEIRA MONSALVARGA, Léa TUEGUEM et Clémence WHITE

Un Peu De Théorie…

Définitions et notions de base

Soit $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Un **processus stochastique** est une collection de variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$. Si l'ensemble I est dénombrable, on parle de processus stochastique **à temps discret** Sinon, on parle de processus stochastique **à temps continu.**

L'ensemble S des valeurs prises par les variables aléatoires est appelé **l'espace d'états.** Si S est dénombrable, on parle de processus **à espace d'états discret.** Sinon, on parle de processus **à espace d'états continu**.

Etant donné $\omega \in \Omega$, on s'intéresse à la collection X(ω) = $\{X_i(\omega)\colon\ i \in I\}$, appelée **une réalisation ou trajectoire** du processus.

Un exemple simple : deux urnes, six boules

Considérons le processus stochastique à temps discret suivant : prenons six boules numérotées de 1 à 6 et répartissons-les de manière aléatoire dans deux urnes U_1 et U_2. A chaque temps t, nous lançons un dé et plaçons la boule correspondante dans l'autre urne.

Il s'agit bien d'une chaîne de Markov. En effet, supposons qu'à l'instant **t = 0** les boules **1, 2 et 5** sont dans $\boldsymbol{U_1}$ et les boules **3, 4 et 6** sont dans $\boldsymbol{U_2}$.

Il apparait clairement qu'en **t = 1,** l'urne $\boldsymbol{U_1}$ comptera 2 boules et l'urne $\boldsymbol{U_2}$ comptera 4 boules ou inversement.

Un Peu Plus De Théorie…

Encore des définitions

Distribution Limite et stationnaire : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Une distribution limite de la chaîne de Markov est un vecteur $\pi = [\pi_0, \pi_1, \ldots]$ tel que pour chaque i, j $\in \mathbb{N}$,

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = \mathrm{i} \mid X_0 = \mathrm{j}] \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1$$

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une matrice de transition P. Une distribution stationnaire π pour P est un vecteur ligne tel que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1$ et $\pi \mathrm{P} = \pi$.

Irréductibilité : Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite irréductible si sa matrice de transition P est **régulière** : pour tout i, j $\in \mathbb{N}$, il existe un entier n tel que $P_{i,j}^n > 0$ i.e. si passer de l'état i à l'état j se fait en un nombre fini d'étapes.

Chaîne de Markov : Soit I = ℕ, l'ensemble des naturels représentant le temps. On dit qu'un processus stochastique $\{X_t : \mathrm{t} \in \mathrm{I}\}$ est **une chaîne de Markov** $\forall\, t > t-1$ dans I, la valeur de X_t sachant X_{t-1} ne dépend pas de la valeur de X_u $\forall\, u < t-1$ i.e. pour n'importe quels 0 < 1 <…<t-1<t, on a

$$\mathbb{P}[\, X_t = x_t \mid X_i = x_i \forall\ i \text{ et } X_{t-1} = x_{t-1}] = \mathbb{P}[X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}\,]$$

On dit qu'une chaîne de Markov est dite **homogène** si le membre de droite ne dépend pas de t.

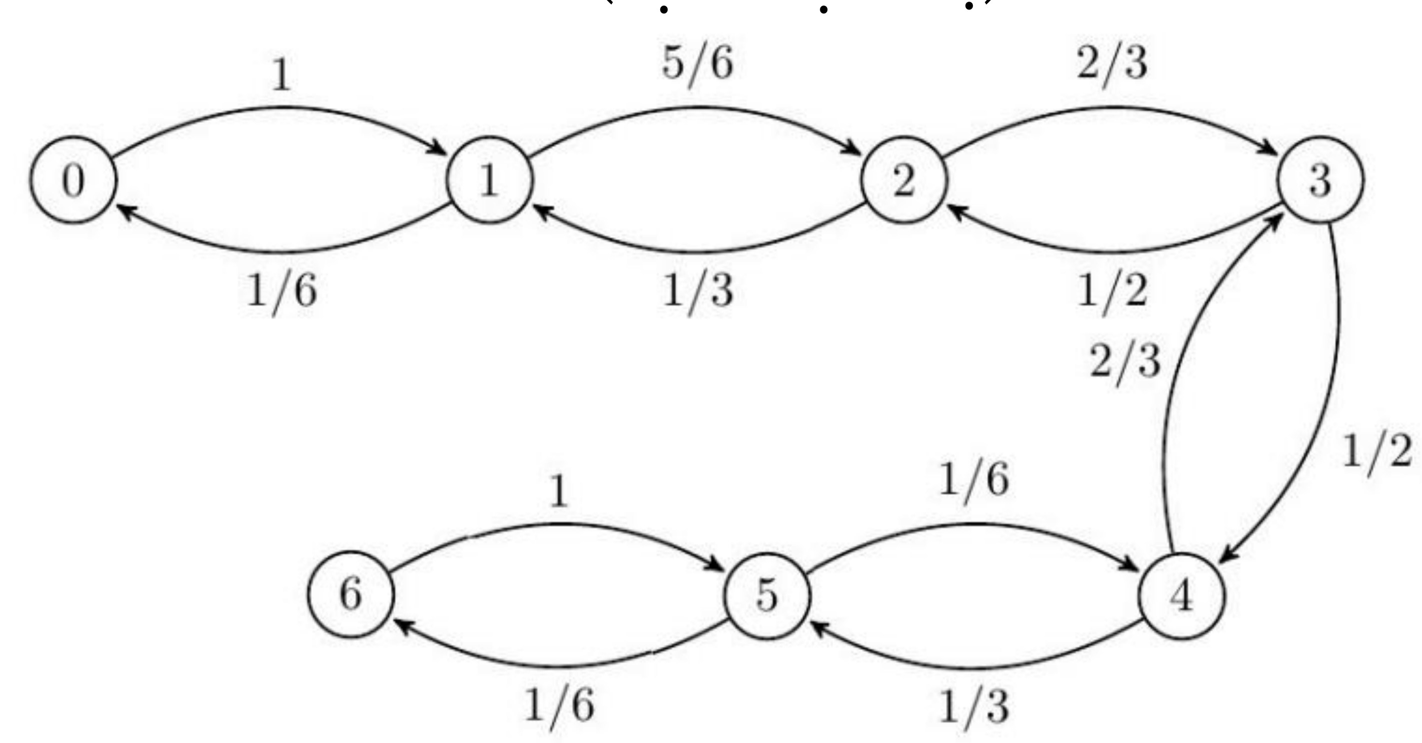
Matrice et graphe de transition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Les états et les probabilités de transitions sont représentés dans un graphe appelée **le graphe de transition :**

- Les sommets du graphe sont les points s_j de S ;
- Les arêtes orientées représentent les probabilités de transition de l'état s_i vers l'état s_j .

Les probabilités de transition $\{p_{ij}\ :\ \mathrm{i}\ ,\ \mathrm{j}\ \in E\}$ sont rassemblées dans **une matrice de transition** de dimension |E| x |E| :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



Etat récurrent : Un état i ∈ ℤ d'une chaîne de Markov est dit récurrent si, partant de l'état i, la chaîne y retournera en un temps fini avec probabilité 1. Par extension, une chaîne de Markov est dite récurrente si tous ses états sont récurrents.

Etat positif récurrent : Soit i un état récurrent d'une chaîne de Markov. Supposons que $X_i = \mathrm{i}$. Soit R_i le plus petit nombre d'étapes qu'il faut pour que la chaîne de Markov retourne à l'état i. Si $r_i = \mathrm{E}(R_i \mid X_0 = \mathrm{i}) < \infty$, alors l'état i est dit **positif récurrent**. Si l'espérance vaut $+\infty$, l'état est dit **nul récurrent.**

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

CHAINES DE MARKOV

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Robin AERTS, Assia BEN HAMOU, Athanasios KANELLAKIS, Lucas LEJEUNE Benjamin NOEZ, Marylène TAVEIRA MONSALVARGA, Léa TUEGUEM et Clémence WHITE

Apériodicité : Pour un état i ∈ ℤ, considérons l'ensemble $B_i := \{n \in \mathbb{N} : P^n_{i,i} > 0\}$. La période de l'état i est alors le plus grand diviseur commun des entiers de cet ensemble. Si cet ensemble est vide, alors l'état i est dit d'ordre 0. Si le PGCD est 1, l'état i est dit **apériodique**. Sinon, l'état i est dit **ergodique** (l'état i est également récurrent dans ce cas).

Comportement des chaînes de Markov à long terme

Théorème : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov **positive récurrente apériodique et irréductible.** Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une distribution limite qui est aussi une distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi_j} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r_j}}\ \forall\ j \in \mathbb{N}$ où r_j représente le temp moyen (ou le nombre d'étapes) nécessaire pour que la chaîne retourne à l'état j.

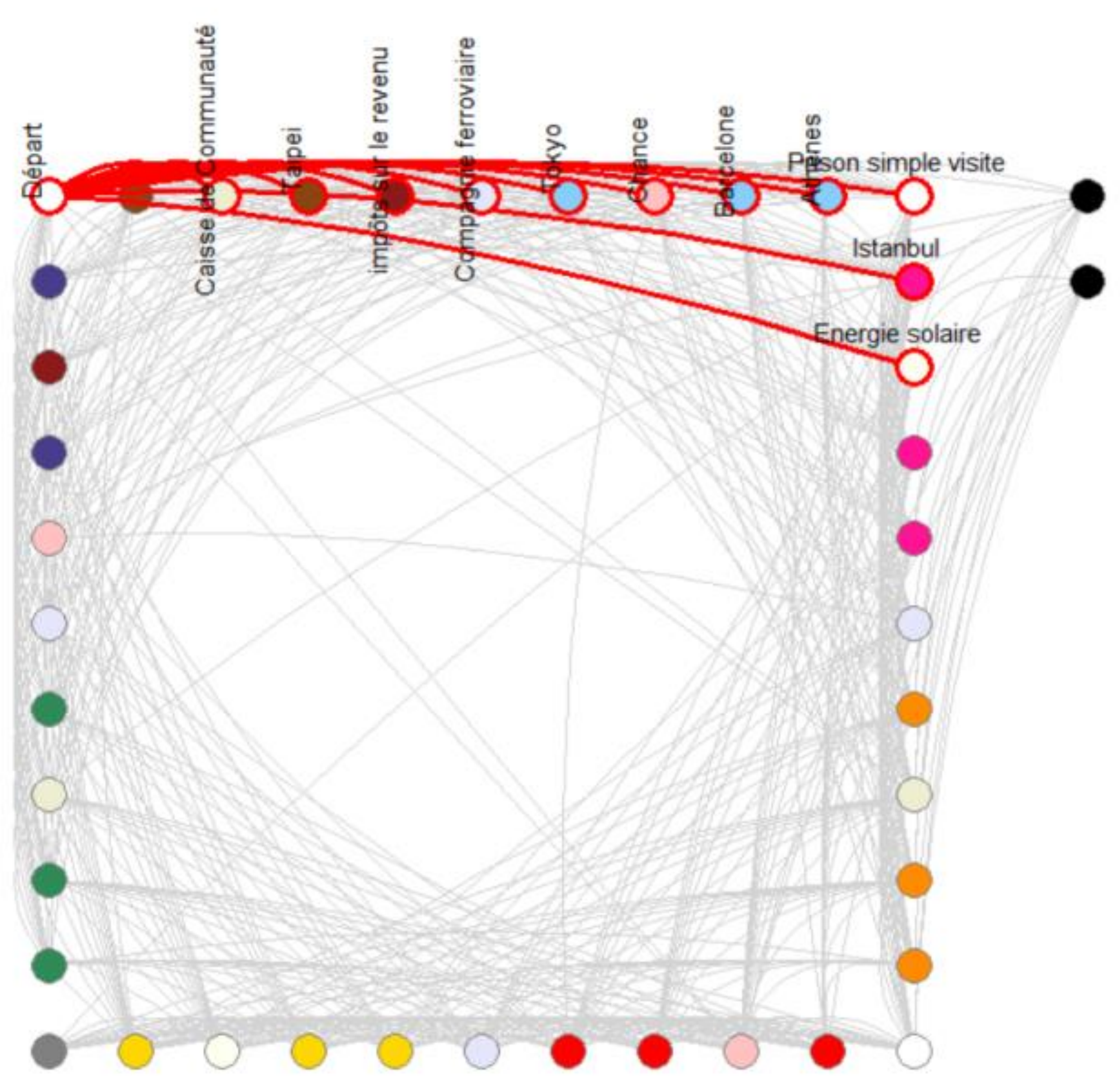
Monopoly & Pokémon: L'Art de la Stratégie Stochastique

Qui veut battre sa grand-mère au Monopoly ?

Le jeu de Monopoly peut être modélisé comme un système de chaîne de Markov tel que :

- ❖ Les états représentent les cases du plateau de jeu
- ❖ Les transitions entre états représentent les lancées de dés

La probabilité de se déplacer vers une certaine case dépend à la fois de la position actuelle du joueur sur le plateau et du résultat des dés qu'il vient de jeter. De ce fait, les flèches (cf. graphe de transition) vont avoir des poids différents suivant la probabilité d'aller vers un autre état.



Prédiction du meilleur type de Pokémon

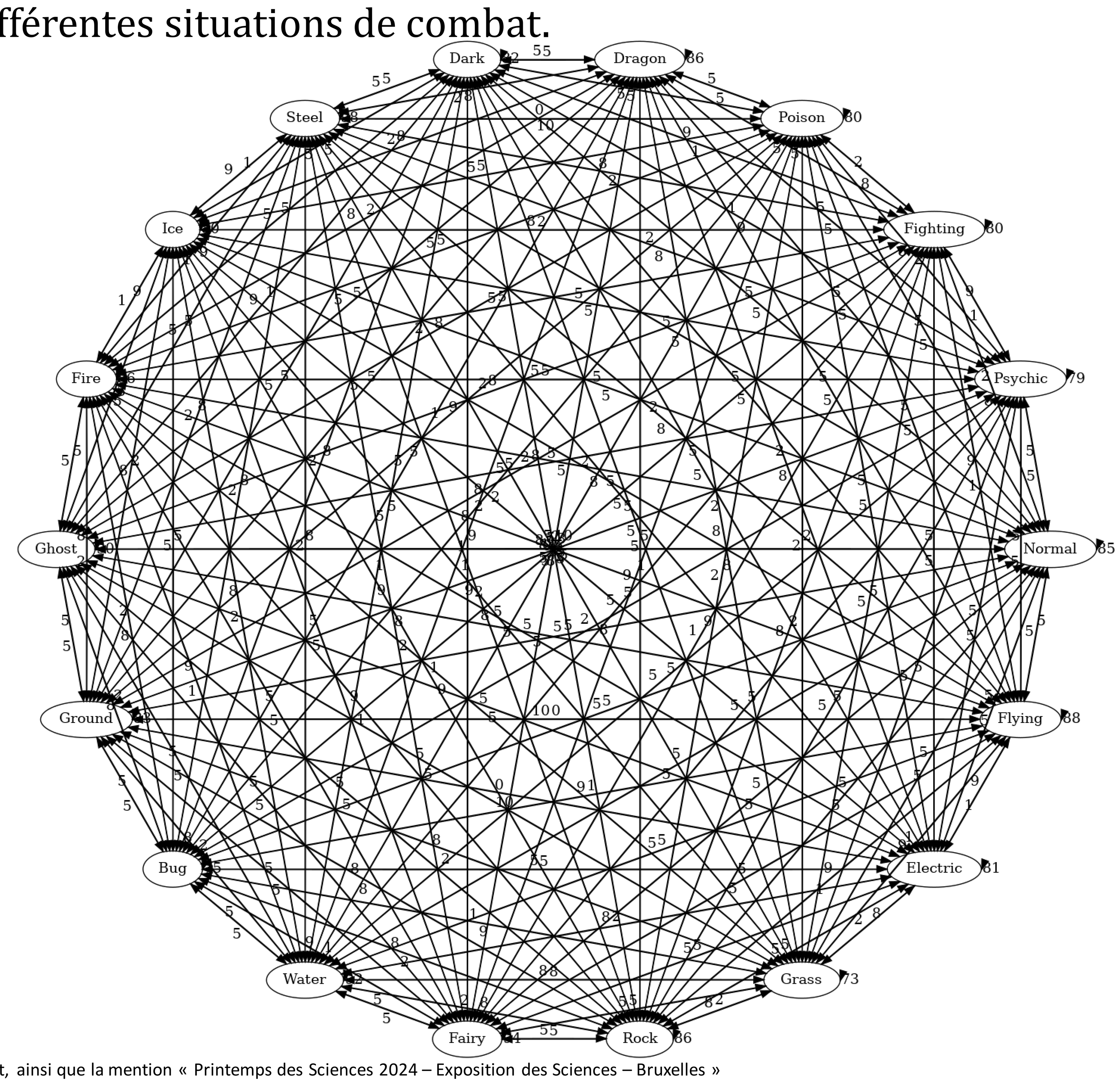
Les chaînes de Markov sont utilisées pour prédire le meilleur type Pokémon en fonction des faiblesses et des forces de chaque type :

- ❖ chaque type de Pokémon représente un état dans la chaîne
- ❖ les transitions entre les types sont basées sur les relations d'efficacité des attaques.

Les probabilités de transition sont déterminées par les interactions entre les types de Pokémon. Cette approche permet d'analyser quel type est le plus avantageux dans différentes situations de combat.

Pour cela, nous pouvons dessiner une table répertoriant les chances de gagner en fonction de la force de notre type de Pokémon par rapport à celui de notre adversaire :

Adversaire / Allié	Fort	Faible	Neutre	Immunisé
Fort	0.5	0.9	0.8	0
Faible	0.1	0.5	0.2	0
Neutre	0.2	0.8	0.5	0
Immunisé	1	1	1	0.5



PRINTEMPS DES SCIENCES 18-24 Mars 2024

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

CHAINES DE MARKOV

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Robin AERTS, Assia BEN HAMOU, Athanasios KANELLAKIS, Lucas LEJEUNE Benjamin NOEZ, Marylène TAVEIRA MONSALVARGA, Léa TUEGUEM et Clémence WHITE

Chaînes De Markov Cachées

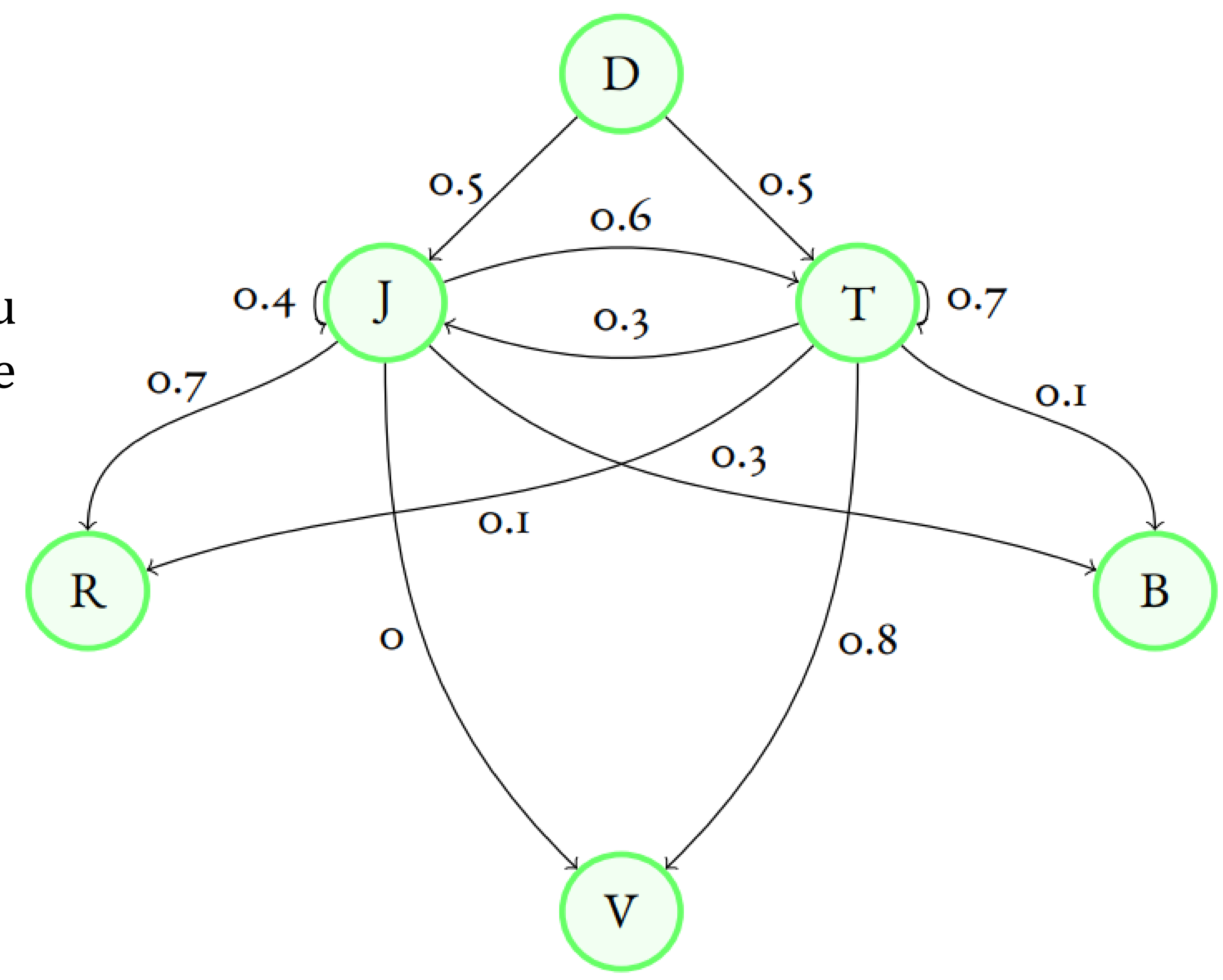
T-shirt et humeur

Les chaînes de Markov cachées sont utilisées pour représenter des processus dynamiques où l'état du système est inobservable. Considérons un professeur qui a exactement deux humeurs : **triste (t) ou joyeux (j).** A moins de lui demander, on ne peut savoir quelle humeur il arbore, en raison de son impassibilité. En revanche, on sait que son humeur un jour donné ne dépend que de son humeur du jour précédent. La transition est donnée par le tableau suivant :

	JOYEUX	TRISTE
JOYEUX	0.4	0.6
TRISTE	0.3	0.7

De plus, les élèves du professeur ont remarqué qu'il a exactement trois couleurs de pull : **rouges (r), vert (v) et bleu(b)** et que la couleur de son pull du jour dépend de son humeur du jour. Ceci peut être représenté par le tableau suivant :

	ROUGE	VERT	BLEU
JOYEUX	0.7	0	0.3
TRISTE	0.1	0.8	0.1



On a donc bien une chaîne de Markov cachée : l'état du professeur (triste ou joyeux) n'est pas directement observable, mais peut seulement être déduit de son comportement (la couleur de son pull).

Pour Aller Plus Loin...

Do Ré Mi

Où interviennent les chaînes de Markov dans la musique? Regardons un cas simple: nous allons prendre un seul morceau de musique :

Ce morceau est composé de 6 notes : **Do Ré Mi Fa Sol La**. Prenons le cas de la note **Do**. En examinant le morceau, nous observons qu'elle est suivie de **Do** ou **Sol**, mais la combinaison **Do-Sol** apparaît deux fois dans notre musique tandis que la combinaison **Do-Do** n'apparaît qu'une seule fois. Ainsi, la probabilité d'avoir Do-Sol est de 0.67 et celle d'avoir **Do-Do** est de 0.33.

En suivant le même raisonnement, nous pouvons déterminer les probabilités des notes suivantes pour chaque état :