PRINTEMPS DES SCIENCES 21-27 Mars 2022

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

La feuille, le prisonnier et l'iPhone

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES - FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Imane Aarab, Yousra Allouka Temsamani, Peter Car, Emilio Molina Vaquerizo et Cemilenur Yuksel

L'utilisation du genre féminin a été adoptée afin de faciliter la lecture et n'a aucune intention discriminatoire

1) Introduction

La **théorie des jeux** est un outil mathématique permettant d'analyser les décisions prises par des individus en situation d'interaction, sous l'hypothèse que tout le monde agit de façon rationnelle. Elle doit son appellation au fait qu'à l'origine cette théorie était basée sur l'étude des jeux de société. Même si on en trouve des traces très anciennes, elle devint une branche importante des mathématiques au milieu du 20ème siècle, notamment à partir de la publication en 1944 du livre "Theory of Games and Economic Behavior" de John Von Neumann et Oskar Morgenstern. Un de ses représentants les plus connus est John Nash dont les travaux lui ont valu le prix Nobel d'économie en 1994. Les mathématiques de la théorie des jeux sont maintenant utilisées dans de nombreux domaines, comme l'économie, la sociologie, la stratégie militaire, la biologie,...

Nous nous concentrerons sur les **« jeux » à 2 joueuses** (Layla et Hayat) et sur 2 grandes catégories de jeux :

jeu coopératif >< jeu non coopératif

jeu simultané >< jeu séquentiel

Les décisions des joueuses peuvent être représentées sous 2 formes :

a) La **forme normale** (un tableau) est en général adaptée à la représentation des jeux simultanés (= chaque joueuse choisit son plan d'action au début sans connaître celui de l'autre et elles jouent simultanément).

b) La **forme extensive** (un arbre) est en général adaptée à la représentation des jeux séquentiels (= Layla choisit son plan d'action ensuite c'est au tour de Hayat).

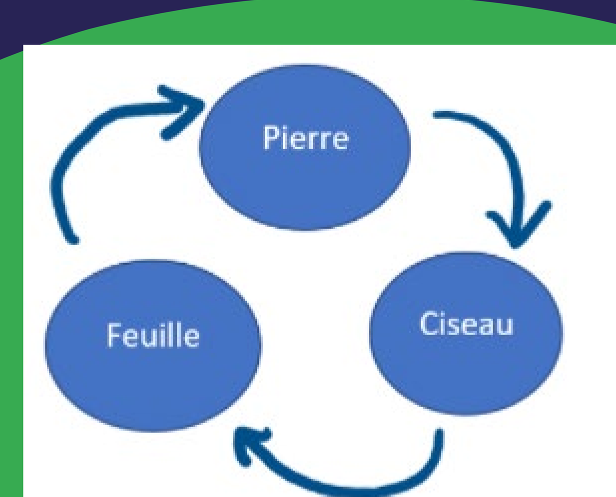
2) Exemples de jeux à 2 personnes

Pierre-feuille ciseau (jeu simultané/jeu non coopératif)

Si Layla et Hayat font la même forme, aucune ne gagne, c'est donc 0 partout. Si l'une d'entre elles choisit une forme qui bat l'autre, la gagnante obtient 1 et l'autre obtient -1. On résume ceci dans un tableau appelé la **matrice des gains**, représentant ainsi le jeu sous **forme normale**. Comme on peut le constater, la somme des gains dans chaque case de notre tableau est nulle : Pierre-Feuille-Ciseau est ce qu'on appelle **un jeu à somme nulle.**

Layla \ Hayat	pierre	feuille	ciseau
pierre	(0,0) $u_1 + u_2 = 0$	(-1,1) $u_1 + u_2 = 0$	(1,-1) ...
feuille	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
ciseau	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Vu que Hayat ne sait pas ce que Layla va faire, y-a-t-il une stratégie qui pourrait lui permettre d'avoir le plus de chances de gagner? Malheureusement, dans cet exemple tous les choix sont équivalents. La meilleure option est donc le **choix aléatoire**, qui garantit que Layla ne devinera pas le choix de Hayat.



Le dilemme de la prisonnière (jeu simultané/jeu non coopératif)

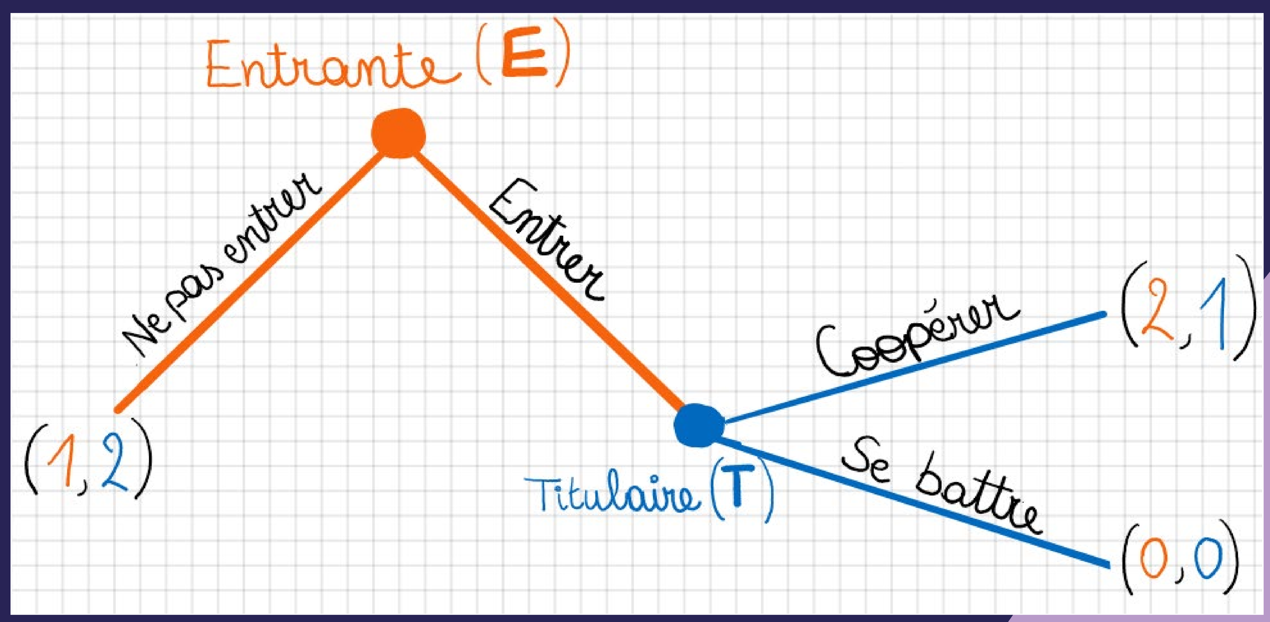
Imaginons que Layla et Hayat soient soupçonnées d'avoir commis un délit, elles sont interrogées séparément de manière à ce qu'elles ne puissent pas communiquer entre elles.
Si elles avouent en dénonçant l'autre, la peine sera de 3 ans chacune.
Si Layla dénonce sa complice qui ne l'a pas dénoncée, elle sera libre, mais Hayat écopera de 8 ans de prison et vice-versa.
Si les filles n'avouent pas, faute de preuves, elles seront condamnées à 1 an.
Représentons l'exemple sous la **forme normale** comme suit

		Hayat	
		Dénoncer	Ne pas dénoncer
Layla	Dénoncer	(3,3)	(0,8)
	Ne pas dénoncer	(8,0)	(1,1)

Le dilemme de la prisonnière est un **jeu à somme NON nulle** c'est-à-dire que la somme des gains des joueuses n'est pas toujours la même.
Les joueuses doivent raisonner à une échelle individuelle en envisageant les choix possibles de leur adversaire.
Nous remarquons que quelle que soit la stratégie adoptée par Hayat, la meilleure option pour Layla est de la dénoncer car si Hayat la dénonce, Layla préférera prendre 3 ans de prison plutôt que 8 ans. Et si Hayat ne la dénonce pas, elle choisira la liberté plutôt qu'1 an de prison. Réciproquement, la meilleure décision pour Hayat est de dénoncer Layla. On voit donc que si les deux joueuses adoptent une stratégie «rationnelle », les deux se dénonceront et on aboutira à un équilibre (3,3) qui sera appelé **l'équilibre de Nash** (= une situation qui résulte du fait que chaque joueuse applique la stratégie la plus **optimale** quelque soit le choix de l'autre).

Problème de l'entrante potentielle (jeu séquentiel/ jeu (non) coopératif)

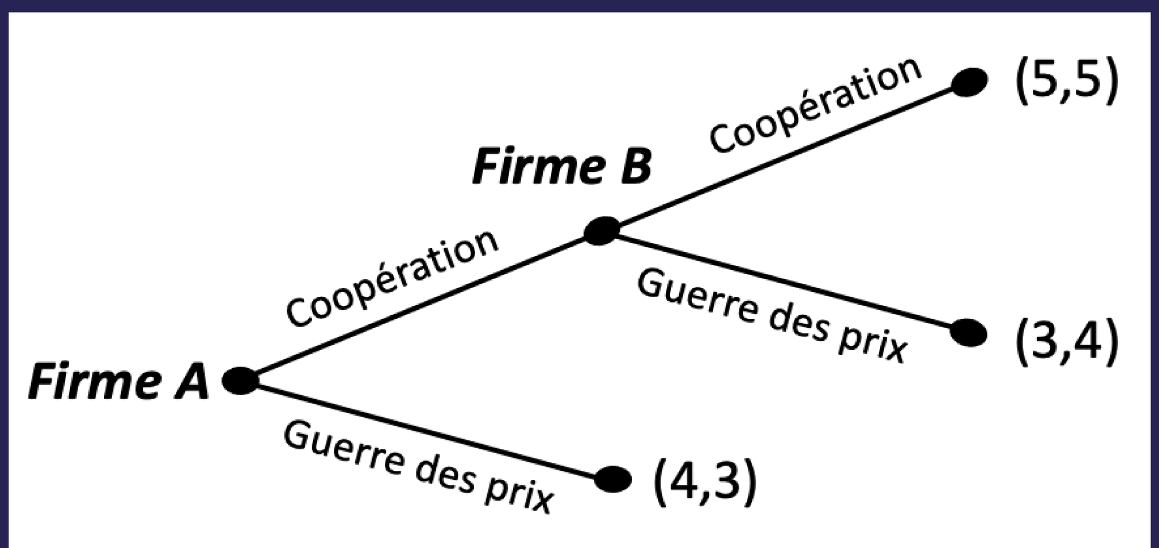
Imaginons le problème d'entrée d'une entreprise sur le marché d'un monopole :
L'entrante (E) doit choisir entre Entrer ou Ne pas entrer. Si elle entre, la firme titulaire (T) aura le choix entre Se battre ou Coopérer.
On peut modéliser le jeu sous la **forme extensive**:



Le premier **nœud** représente la décision de l'entrante et le deuxième nœud celui de la titulaire.
Les trois résultats possibles sont (Entrer, Coopérer), (Entrer, Se battre) et (Ne pas entrer).
Le meilleur résultat pour (E) est d'entrer sur le marché et que (T) coopère donc (Entrer, Coopérer) = (2,1) tandis que la meilleure option pour (T) est que (E) n'entre pas donc (Ne pas entrer) = (1,2).
Le pire résultat pour (T) et (E) est (Entrer, Se battre) = (0,0).
Donc lorsque l'entrante entre sur le marché, la stratégie **optimale** pour la titulaire est de coopérer.

Collusion (jeu simultané/ jeu coopératif)

Supposons qu'il y ait deux entreprises (A et B) vendant toutes les deux des ordinateurs, comme toute autre entreprise, elles souhaitent maximiser leurs profits. Pourtant les deux firmes vendent le même produit ce qui les rend rivales, et ce qui ne laisse à chacune que deux possibilités :
1) A et B décident de coopérer et fixent toutes les deux leurs prix à un montant égal.
2) A (B) entame une guerre des prix avec B (A) afin de vendre plus ou de forcer B (A) à quitter le marché.
L'exemple peut se représenter sous la **forme extensive** comme suit



La collusion fait allusion à la coopération illégale entre différentes entreprises. Cette alliance conduit à restreindre la concurrence sur le marché, ce qui se traduit par des bénéfices plus élevés pour les firmes. On peut clairement constater que la collusion est à la fois **l'équilibre de Nash** (5,5) et la meilleure option car si l'une d'elles décident de déclencher une guerre des prix, l'ensemble des gains sera soit (4,3) soit (3,4).

3) Conclusion

La théorie des jeux regroupe toutes les mathématiques liées à des situations similaires aux exemples ci-dessus. On exploite ces résultats en pratique pour optimiser des décisions, analyser des interactions entre agentes,…
Nous voyons donc que les mathématiques ne sont pas seulement utilisées pour étudier des équations, pour déterminer des domaines de fonctions ou calculer des intégrales, mais aussi pour comprendre des problèmes concrets.