Rémi Bissot, Quentin Claus, Anaïs Defossez,
Emna Grégoire & Anouar Laloy

Boules et bulles : Une introduction aux surfaces minimales

Motivation du sujet

Les surfaces minimales sont un sujet entièrement nouveau pour la plupart des élèves. Son introduction donne une première approche de la géométrie en 3 dimensions, et de la notion d'une surface plongée dans un espace tridimensionnel. De plus, grâce aux films de savon, il est à la fois aisé de se les représenter de manière pratique, et de pouvoir les aborder dans un cadre plus ludique et expérimental. Les applications pratiques sont simples à expliquer, et touchent entre autres le domaine spatial, faisant ainsi le lien entre notre sujet et le thème général de l'exposition. Tous ces points sont abordés dans la vidéo explicative.

Contenu de la vidéo

Le but du début de la vidéo est d'introduire le concept de problème de minimisation. Pour cela nous parlons des bulles de savon, qui doivent minimiser leur surface par rapport au volume d'air qu'elles contiennent. Pour expliquer ce fait, une parenthèse physique, où le phénomène de tension de surface est résumé, est faite.

Le problème de minimisation évoqué en introduction est similaire sous certains aspects au problème fondateur de la théorie des surfaces minimales : le problème de Plateau. En effet, il s'agit également d'un problème de minimisation, faisant intervenir du savon, ainsi que la notion de surface. Il est d'abord présenté de la manière expérimentale dont Joseph Plateau l'a appréhendé : on se demande, étant donné un contour dans un espace tridimensionnel, si il existe toujours un film de savon qui a ce contour. Un exemple de réalisation de cette expérience, fait par nos soins est présenté dans la vidéo.

Une fois cela fait, le problème est abordé plus rigoureusement (car il faut insister sur le fait que, malgré l'intérêt scientifique et éducatif de faire des expériences, une preuve expérimentale n'est certainement pas une preuve mathématique), et formulé en termes mathématiques. C'est dans cet énoncé mathématique qu'apparaît pour la première fois le terme « surface minimale », que nous définissons donc juste après. Nous insistons ensuite sur le caractère local du minimum, qui se justifie par le fait qu'ainsi, les films de savon sont bien des surfaces minimales.

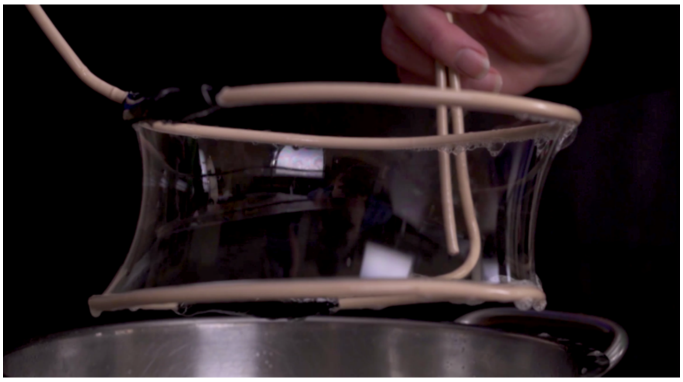
Pour avoir plus d'intuition sur la forme que prennent les surfaces minimales, nous expliquons la propriété selon laquelle les surfaces minimales sont de courbure moyenne nulle en tout point. Ceci nécessite donc de commencer par expliquer intuitivement ce qu'est la courbure moyenne.

Après cela, nous présentons des exemples de surfaces minimales ; d'abord en expérimentant nous-même avec des films savonneux pour créer une caténoïde et une hélicoïde, et ensuite en présentant d'autres images de surfaces minimales.

Enfin, nous concluons sur les applications pratiques de l'étude des surfaces minimales. Pour le domaine de l'architecture, nous montrons un exemple concret : celui du stade olympique des Munich. Pour celui de l'astronomie, nous évoquons le lien entre l'étude des trous noirs et celle des surfaces minimales.

Activité à faire en classe

Comme dit dans ce document, et comme montré dans la vidéo, il est aisé, en se munissant de fil de fer, d'eau, de liquide vaisselle et de glycérine, d'expérimenter sur les surfaces minimales avec une grande variété de contours. Il est peut-être même possible d'amener les élèves à découvrir certains aspects du concept de surfaces minimales par eux-mêmes, en les faisant expérimenter avec des films savonneux.



Pour aller plus loin

Comme expliqué dans l'article https://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html, le problème de Steiner est traduisible en un problème de surfaces minimales. Il peut se résoudre à la fois expérimentalement avec de l'eau savonneuse, mais également mathématiquement : la preuve donnée dans l'article pour le cas où il n'y a que trois points est abordable dès la fin de l'école secondaire.