La géométrie du donut :
Un Univers à croquer!

L'objectif de notre atelier est d'introduire de façon familière la notion d'espaces non-euclidiens, et d'en montrer quelques caractéristiques amusantes.

1) <u>Introduction - accroche</u>

Le sujet est tout à fait pertinent lorsque l'on considère la théorie de la Relativité Générale introduite par Albert Einstein, qui affirme que notre Univers n'est en fait pas euclidien, et que sa géométrie est bien plus étrange qu'il n'y paraît. Par analogie avec notre Univers, nous avons essayé d'insister sur le caractère "localement euclidien" des espaces non-euclidiens, et d'introduire de façon intuitive une description intrinsèque de géométries 'exotiques'. L'idée est d'aider les étudiant.e.s à s'immerger dans de tels espaces, à appréhender ce que signifie "vivre dans un espace non-euclidien".

2) <u>Notions abordées dans les vidéos</u>

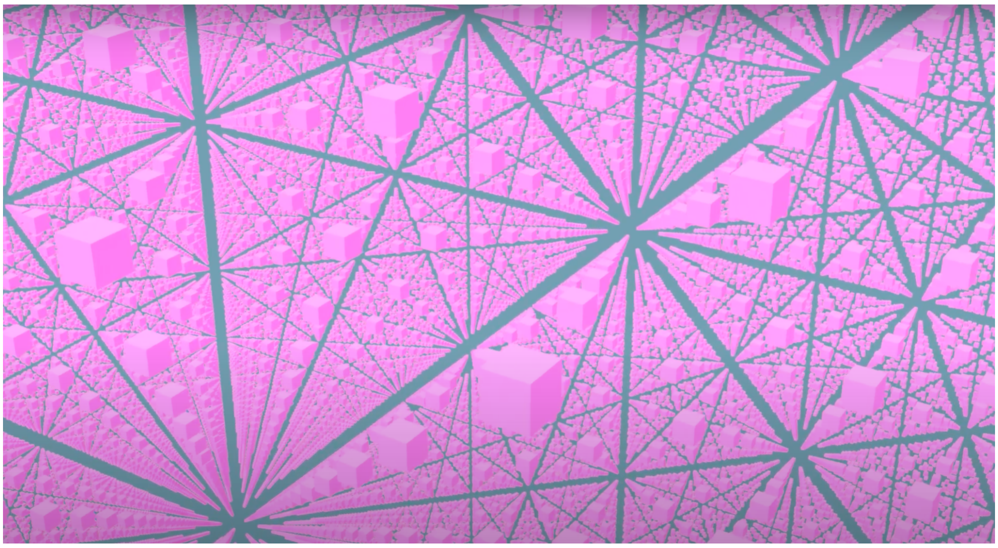
   a) <u>Géodésiques</u>

Nous parlons en particulier de la généralisation de droites dans ces espaces, aussi appelées *géodésiques*. (Le mot est omis dans la vidéo courte afin de ne pas intimider l'assistance.) Ce point est particulièrement intéressant, parce que les géodésiques sont précisément les trajectoires suivies par la lumière ; cette description équivalente permet donc de faire le lien pratique avec les spécificités optiques des espaces envisagés. Dans un espace euclidien, la géodésique qui relie deux points est évidemment une droite.
Dans notre vidéo longue, nous détaillons les différents types de géodésiques sur le cylindre. Dans notre vidéo courte, nous montrons que sur une sphère, les grands cercles (méridiens) sont des géodésiques, alors que les petits cercles (parallèles différents de l'équateur) n'en sont pas. La technique de la "latte toute molle" utilisée dans cette vidéo peut offrir aux étudiant.e.s une façon amusante de découvrir les géodésiques, et d'avoir une bonne intuition des trajectoires qui paraissent "localement droites" lorsque l'on est restreint à n'importe quelle surface.

   b) <u>Vivre dans un tore</u>

Notre prochain objectif est de montrer les implications que peut avoir le fait de vivre dans un Univers à géométrie non-euclidienne. À cet effet, nous avons pris comme exemple un espace torique. À deux dimensions, un tore peut être vu comme la surface d’un donut. En fait, dans nos vidéos (avec évidemment plus de détails dans la vidéo longue), nous montrons que cette surface peut se construire à partir d’un morceau de plan sur lequel on aurait identifié les paires de côtés opposés. Nous nous intéressons ensuite à la façon dont les rayons lumineux se déplacent dans un tel espace. À ce sujet, un point intéressant, et que nous détaillons, est que l’image d’un objet émettant de la lumière atteint en fait un observateur une infinité de fois, en simple conséquence de la géométrie d’un tel espace.

Nous généralisons ensuite cette construction à un tore à trois dimensions, ou 3-tore, qui correspond à un cube sur lequel on a identifié les paires de faces opposées. L’objectif de ce passage à trois dimensions est de pouvoir montrer ce que nous verrions si telle était la géométrie de notre Univers, et de laisser entendre que l’on peut considérer des espaces non-euclidiens à trois dimensions - voire plus. Voici un avant-goût du rendu :



3) <u>Atelier à faire en classe</u>

Toutes les constructions faites dans la vidéo longue sont pensées pour pouvoir être réalisées en vrai avec relativement peu de matériel, et l’on pourrait imaginer un atelier à faire en classe avec les élèves pour montrer concrètement un aspect plus ludique des mathématiques. On pourra également exposer des propriétés en plus de celles déjà abordées et montrer par exemple que, sur un cylindre, deux droites pouvant se recouper une infinité de fois, il est possible de construire un carré qui n’a que trois sommets avec seulement deux droites perpendiculaires.